

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호																		
----	--	-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

떨러오는 별빛 반짝이는데

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하십시오.

- **공통과목** 1~8쪽
- **선택과목**
 - 확률과 통계 9~12쪽
 - 미적분 13~16쪽
 - 기하 17~20쪽

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

제 2 교시

수학 영역

출수형

5지선다형

1. $f(x) = \frac{42}{x-1}$ 일 때, $(f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(7)$ 의 값은? [2.7점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2. 2019학년도 수능에 응시한 수험생은 국어, 영어 영역은 공통 과목이고, 수학 영역은 가형, 나형 중 하나를 선택한다. 탐구 영역에서는 사회탐구 영역에서 9과목 중 2과목을 선택하거나 과학탐구 영역에서 8과목 중 2과목을 선택한다. 수험생이 선택할 수 있는 과목의 조합의 수는? [3.3점]

- ① 112 ② 120 ③ 128 ④ 136 ⑤ 144

3. 곡선 $y = \sqrt{x}$ 와 직선 $y = \frac{1}{2}x + n - 1$ 의 교점 중 y 좌표가 정수인 점이 존재하도록 하는 자연수 n 의 개수는? [3.6점]

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

4. 6개의 공에 각각 1부터 6까지의 자연수가 각각 적혀 있다. 이 6개의 공을 구분이 되지 않는 3개의 상자에 넣는 경우의 수는? (단, 빈 상자가 있을 수 있다.) [3.7점]

- ① 118 ② 119 ③ 120 ④ 121 ⑤ 122

5. 자연수 x 에 대하여 $\sqrt{2x} + \frac{75}{2x-1}$ 가 정수가 되도록 하는 모든 x 의 값의 합은? [3.9점]

- ① 4 ② 10 ③ 16 ④ 22 ⑤ 28

6. $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c} = -\sqrt{abc}$ 이고 절댓값이 10 이하인 정수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는? [4.2점]

- ① 4961 ② 5061 ③ 5161 ④ 5261 ⑤ 5361

7. 곡선 $y = \sqrt{x}$ 에 접하는 직선 위의 점들의 집합을 S 라 하자.
 S 의 한 원소 r 에 대하여 r 과 점 $(4, 0)$ 사이의 거리의
 최솟값은? [4.4점]

- ① $\frac{\sqrt{11}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{15}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{17}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{19}}{2}$

8. 세 그래프 $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{2024}$, $y = \frac{1}{x-n}$ ($x > n$)으로
 둘러싸인 영역의 내부 및 둘레에 있는 점 중에서 x 좌표와
 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 $f(n)$ 이라 하자.
 $f(n) \leq 72$ 을 만족하는 자연수 n 의 최댓값을 k 라 할 때,
 $k + f(k)$ 의 값은? [4.6점]

- ① 92 ② 93 ③ 94 ④ 95 ⑤ 96

9. 상수함수가 아닌 함수 $f(x) = \frac{bx+c}{x-a}$ 와 자연수 n 에 대하여
 $f_1(x) = f(x)$, $f_{n+1}(x) = (f \circ f_n)(x)$ 이다. $f_n(x)$ 가 정의되는
 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f_k(x)$ 인 2 이상 3 이하의
 자연수 k 가 존재하도록 하는 -5 이상 5 이하인 정수 $a, b,$
 c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는? [4.7점]

- ① 94 ② 99 ③ 104 ④ 109 ⑤ 114

10. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 와 $x < 5$ 에서 정의된

함수 $g(x) = 1 - \frac{2}{x-5}$ 가 있다. 3보다 작은 실수 t 에 대하여

$t \leq x \leq t+2$ 에서 함수 $(f \circ g)(x)$ 의 최솟값을 $h(t)$ 라 할 때, $h(t)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(t) = \begin{cases} f(g(t+2)) & (t < 1) \\ 6 & (1 \leq t < 3) \end{cases}$ (나) $h(-1) = 7$

$f(5)$ 의 값은? [4.9점]

- ① 24 ② 30 ③ 36 ④ 42 ⑤ 48

단답형

11. ${}_7P_2$ 의 값을 구하시오. [2.0점]

12. 자연수 n 에 대하여 $f(n) = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 일 때,

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$ 의 값을 구하시오. [3.0점]

13. 원 위에 간격이 일정한 26개의 점이 있다. 이 점들 중 3개의 점을 골라 직각삼각형 또는 이등변삼각형을 만드는 경우의 수를 구하시오. [3.0점]

14. 순열과 조합에 대한 다음 두 물음에 답하시오. [각 4.0점]

1) ${}_xP_y = 24$ 를 만족하는 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하시오. (단, x 와 y 는 0 이상의 정수)

2) ${}_aC_2 = 2 \cdot {}_bC_2$ 를 만족하는 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하시오. (단, a 와 b 는 0 이상의 정수)

15. $f(x) = \begin{cases} \frac{(a+1)x+1}{x-a} & (x \neq a) \\ a+1 & (x = a) \end{cases}$ 에 대하여 두 그래프

$y = f(x), y = f^{-1}(x)$ 의 교점의 개수를 $g(a)$ 라 하자. 그래프 $y = g(x)$ 를 그리시오. [5.0점]

16. 좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 영역

$$\left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{x+3}}{2} \right\}$$

에 포함되는 정사각형 중에서 다음 조건을 만족시키는 모든 정사각형의 개수를 $f(n)$ 라 하자.

(가) 각 꼭짓점의 x 좌표, y 좌표가 모두 정수이다.

(나) 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$ 이하이다.

$f(n) \leq 400$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값을 구하시오.

[5.0점]

17. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 와 함수 $f: X \rightarrow X$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오. [각 6.0점]

1) X 의 임의의 두 원소 a, b 에 대하여 $a \leq b$ 일 때 $f(a) \leq f(b)$ 이고, X 의 어떤 두 원소 c, d 에 대하여 $c < d$, $f(c) = f(d)$ 인 순서쌍 (c, d) 의 개수가 3개인 함수의 개수

2) f 의 역함수가 존재하고, 정의역의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) \neq x$ 인 함수의 개수

18. 함수 $f(x) = \frac{k}{x-11} + 6$ ($k \geq 36$)에 대하여

$|f(x)| \leq y \leq -x+5$ 인 두 자연수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수가 2 이상 4 이하가 되도록 하는 모든 자연수 k 의 개수를 구하시오. [7.0점]

서술형

19. $f(x) = \frac{cx+d}{ax+b}$ 의 역함수가 존재할 조건을 구하시오. [7.0점]

20. $0 \leq x \leq 1$ 에서 정의되는 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족할

때, $f\left(\frac{1}{13}\right) + f\left(\frac{1}{11}\right)$ 의 값을 구하시오. [8.0점]

(가) $f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}f(x)$

(나) $f(1-x) = 1-f(x)$

(다) $0 \leq x \leq y \leq 1$ 인 상수 x, y 에 대하여 $f(x) \leq f(y)$

※시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

홀수형

1. ②
2. ③
3. ②
4. ⑤
5. ②
6. ④
7. ③
8. ①
9. ①
10. ④

11. 42

12. $\frac{5}{21}$

13. 598

14. 1) 3 2) 2

15. $y=2$ 그러면 됨.

16. 65

17. 1) 80 2) 485

18. 18

19. $f(x)$ 는 분모가 일차식인 유리함수 또는 일차 다항식이다.
 $f(x)$ 가 일차 다항식일 때 $a=0$ 이고, $b \neq 0$, $c \neq 0$ 이다.
 $f(x)$ 가 분모가 일차식인 유리함수일 때 $a \neq 0$ 이고, $f(x)$ 는 상수함수가 아니므로 $ad \neq bc$
 $\therefore a=0, b \neq 0, c \neq 0$ 또는 $a \neq 0, ad \neq bc$

20. (나)에 $x=0$ 을 대입하면 $f(0)=0$, $x=1$ 을 대입하면 $f(1)=1$.

(가)에 $x=1$ 을 대입하면 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$ 이고, (나)에 $x=\frac{1}{3}$ 을

대입하면 $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}$

\therefore (다)에 의하여 $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$ 일 때 $f(x)=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{9} \leq x \leq \frac{2}{9}$ 일 때 $f(x)=\frac{1}{4}$

$\frac{7}{9} \leq x \leq \frac{8}{9}$ 일 때 $f(x)=\frac{3}{4}$

$\frac{7}{27} \leq x \leq \frac{8}{27}$ 일 때 $f(x)=\frac{3}{8}$

$\frac{7}{81} \leq x \leq \frac{8}{81}$ 일 때 $f(x)=\frac{3}{16}$

$\frac{7}{81} \leq \frac{1}{11} \leq \frac{8}{81}$ 이므로 $f\left(\frac{1}{11}\right)=\frac{3}{16}$

$f\left(\frac{1}{13}\right)=t$ 라 하면 $f\left(\frac{12}{13}\right)=1-t$ 이고, $f\left(\frac{4}{13}\right)=\frac{1-t}{2}$ 이다.

$f\left(\frac{9}{13}\right)=\frac{1+t}{2}$ 이고, $f\left(\frac{3}{13}\right)=\frac{1+t}{4}$, $f\left(\frac{1}{13}\right)=\frac{1+t}{8}$ 이다.

$t=\frac{1+t}{8}$ 이므로 $t=\frac{1}{7}$ 이고, $f\left(\frac{1}{11}\right)+f\left(\frac{1}{13}\right)=\frac{37}{112}$ 이다.