著 : 雀
sukita1729@gmail.com

1. 다음 극한의 값을 구하여라. [★★★☆☆]

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1729\pi)}{\ln(x+2023)}$$

수능 문제였다면 로피탈 정리를 쓴 후 1을 고르고 넘기면 되지만, 논술이나 심층면접에서는 엄밀한 설명을 해야 한다. 아래는 로피탈 정리를 사용하지 않는 풀이이고, 로피탈 정리를 사용할 경우 코시의 평균값 정리를 이용하여 로피탈 정리를 증명한 후 사용해야 한다. (코시의 평균값 정리는 롤의 정리로 증명된다.)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1729\pi)}{\ln(x+2023)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x+\ln\left(1+\dfrac{1729\pi}{x}\right)}{\ln x+\ln\left(1+\dfrac{2023}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{\ln(1+1729\pi/x)}{\ln x}}{1+\dfrac{\ln(1+2023/x)}{\ln x}}$$ 이다.

한편 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+2023/x)}{\ln x}$ 에서 분자는 $\ln 1=0$으로 수렴하고 분모는 음의 무한대로 발산하므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+2023/x)}{\ln x}=0$$

이고, 마찬가지로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+1729\pi/x)}{\ln x}=0$$

이다. 따라서 수렴하는 극한의 성질에 의해 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1729\pi)}{\ln(x+2023)}=1$이다. ■

2. 다음 극한의 값을 구하여라. [★★★★★]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

1번 논제와 마찬가지로 로피탈 정리를 사용하면 간단하게 풀리지만, 로피탈 정리를 엄밀하게 증명한 후 사용해야 한다. 증명 없이 사용할 경우 0에 수렴하는 점수를 받을 가능성이 높다.

다른 풀이는 크게 세 가지가 있다.

(1) $-x$ 치환을 이용하는 발상적 풀이

x를 $-t$로 치환하면 $x\to 0$일 때 $t\to 0$이므로

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1-t)+t}{t^2}$$

이다. 우변의 t를 다시 x로 바꿔준 후 이를 처음의 극한식과 더하면 e의 정의에 의해

$$2L=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\ln(1-x^2)^{\frac{1}{x^2}}=-\ln e=-1$$

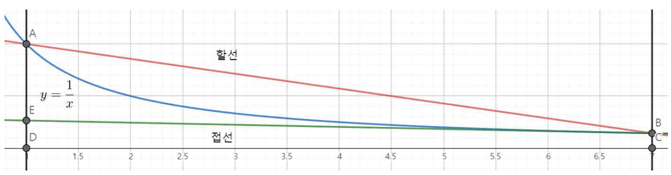
이고, $L=-\dfrac{1}{2}$이다. ■

(2) 그래프를 이용하는 풀이

주어진 극한에서 $t=1+x$로 치환하면 $x\to 0$일 때 $t\to 1$이고

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{t\to 1}\frac{\ln t-(t-1)}{(t-1)^2}$$

이다. 이때 $\displaystyle\ln t=\int_1^t\frac{1}{x}\,dx$이므로 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프의 밑넓이는 아래 그림과 같이 접선과 할선에 의해 만들어지는 사다리꼴의 넓이 사이에 있다.



즉,

$$\square\mathrm{BCDE} \le \ln t \le \square\mathrm{BCDA}$$

이다. 한편 점 $\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t}$$

이므로 접선과 직선 $x = 1$이 만나는 점은 $\left(1,\ \dfrac{2t-1}{t^2}\right)$이고, 다음이 성립한다.

$$\frac{1}{2}(t-1)\left(\frac{3t-1}{t^2}\right) \le \ln t \le \frac{1}{2}(t-1)\left(1+\frac{1}{t}\right)$$

$$\frac{1}{2}(t-1)\left(\frac{-2t^2+3t-1}{t^2}\right) \le \ln t-(t-1) \le \frac{1}{2}(t-1)\left(\frac{1}{t}-1\right)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{-2t+1}{t^2} \le \frac{\ln t-(t-1)}{(t-1)^2} \le -\frac{1}{2}$$

한편 $\displaystyle\lim_{t\to1}\frac{1-2t}{2t^2} = -\frac{1}{2}$이므로 샌드위치 정리에 의해

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{t\to1}\frac{\ln t-(t-1)}{(t-1)^2} = -\frac{1}{2}$$

이다. ■

(3) 미분계수의 정의를 이용하는 풀이

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x\to1}\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)^2}$$

에서 $f(x) = \ln x$, $g(x) = \begin{cases}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} & (x \ne 1)\\ 1 & (x = 1)\end{cases}$이라 하면

$$\lim_{x\to1}g(x) = \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 1 = g(1)$$

이므로 g는 연속함수이고, f는 미분가능하므로 g도 미분가능하다. 또한, g의 도함수가 연속임을 보일 수 있지만, 이 과정은 길고 복잡하므로 이 풀이를 의도할 때에는 g의 도함수가 연속이라는 조건을 주는 것이 일반적이다. 여기서는 그러한 조건이 주어졌다고 생각하자.

따라서

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x-1)-f(x)+f(1)}{(x-1)^2}$$

이고, g'은 연속함수이므로

$$g'(1) = \lim_{x\to1}g'(x) = \lim_{x\to1}\frac{f'(x)(x-1)-f(x)+f(1)}{(x-1)^2}$$

이다. 한편 미분계수의 정의에 의해

$$g'(1) = \lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)-(x-1)}{(x-1)^2} \quad \cdots \ [1]$$

이다. g는 미분가능하므로 $g'(1)$은 존재하고, 위 두을 더하면 수렴하는 극한의 성질에 의해

$$2g'(1) = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(f'(x)-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}$$

$$= f''(1) = -\frac{1}{x^2}\bigg|_{x=1} = -1$$

이고, $g'(1) = -\dfrac{1}{2}$이다. 한편 식 [1]에 $f(x) = \ln x$를 대입하면 문제의 극한식이 되고, 이는 $g'(1)$과 같으므로 답은 $-\dfrac{1}{2}$이다. ■

3. 다음 극한의 값을 구하여라. [★★★★★]

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right)\ \cdots\ \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)}$$

극한 기호 안의 식을 S_n이라 하면

$$\ln S_n = \frac{1}{n}\ln\left[\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right)\ \cdots\ \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left[\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right]$$

이고, 정적분의 정의에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\ln S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left[\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx$$

이다. 이제 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx$라 하자. x를 $\frac{\pi}{2}-x$로 치환하면 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$이므로

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx$$

이고, 두 식을 더한 후 2로 나누면

$$I = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)dx - \frac{\pi}{4}\ln 2$$

이다. $u = 2x,\ du = 2dx$로 치환하면

$$I = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\ln(\sin u)du - \frac{\pi}{4}\ln 2$$

이고, $\sin u$는 $x = \frac{\pi}{2}$에 대해 대칭이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u)du = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin u)du$$

가 성립한다. 또는, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin u)du$에서 u를 $\pi-u$로 치환하면 두 적분의 값이 같다는 것을 알 수 있다.

따라서

$$I = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\ln(\sin u)du - \frac{\pi}{4}\ln 2$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u)du - \frac{\pi}{4}\ln 2 = \frac{1}{2}I - \frac{\pi}{4}\ln 2$$

이므로 $\frac{1}{2}I = -\frac{\pi}{4}\ln 2,\ I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$이다. 즉,

$$\lim_{n\to\infty}\ln S_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx = -\ln 2$$

이고, $\ln x$는 연속함수이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$$

이다. ■

4. 다음 극한의 수렴 여부를 논하고, 그 근거를 논술하여라. [★★★★☆]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{2n-1}{2n}\right)$$

$a_n=\dfrac{2n-1}{2n}$이라 하고 $L_n=a_1a_2a_3\cdots a_n$이라 하자.
각각의 a_n에 대하여

$$a_n=\frac{2n-1}{2n}=1-\frac{1}{2n}<1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$$

이 성립하므로 $b_n=\dfrac{2n}{2n+1}$이라 하면

$$L_n^2=a_1a_1a_2a_2\cdots a_na_n<a_1b_1a_2b_2\cdots a_nb_n$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

$$=\frac{1}{2n+1}$$

이다. 한편 a_n은 모두 양수이므로 L_n도 양수이고,

$$0<L_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

이 성립한다. 이때 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$이므로 샌드위치 정리에 의해

$$\lim_{n\to\infty}L_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{2n-1}{2n}\right)=0$$

이다. ■

5. 다음 제시문을 활용하여 주어진 극한의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [★★☆☆☆]

> 구간에서 연속인 모든 함수는 그 구간에서 적분가능하다. 하지만 구간에서 불연속점이 존재하는 경우에도 불연속점을 기준으로 적분 구간을 나누어 정적분을 수행할 수 있는 경우가 있다.
>
> 예를 들어, $\int_{3.5}^{5}[x]dx$에서 피적분함수는 $x=4$에서 불연속이므로 이를 $\int_{3.5}^{4}[x]dx+\int_{4}^{5}[x]dx$로 나누어 계산할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\int_0^{n^2}[\sqrt{x}]\,dx$$

구간을 나누어 계산만 잘 하면 어렵지 않게 풀린다.

$[\sqrt{x}]$는 $x=1,4,9,\cdots$와 같이 제곱수일 때 불연속점이 발생하므로 제곱수를 기준으로 구간을 나누면 다음과 같다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\int_0^{n^2}[\sqrt{x}]\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)^2}^{k^2}[\sqrt{x}]\,dx$$

구간 $((k-1)^2,k^2)$에서 $k-1<\sqrt{x}<k$이므로
$[\sqrt{x}]=k-1$이고, 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)^2}^{k^2}[\sqrt{x}]\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)^2}^{k^2}(k-1)\,dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)(2k-1)$$

이다. 이때 $\sum_{k=1}^{n}k$ 이하는 n에 관한 2차식이므로 분모의 n^3에 의해 0으로 수렴하고, $\sum_{k=1}^{n}2k^2$만 고려해도 무방하다. 즉, $\sum_{k=1}^{n}2k^2=\dfrac{1}{3}n(n+1)(2n+1)$이므로 위 극한의 값은 $\dfrac{2}{3}$이다. ■

6. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ 일 때, 극한 $\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n}$의 수렴 또는 발산 여부를 판단하고, 수렴하는 경우 극한의 값을 구하시오.
[★★★★☆]

b_n은 급수 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}}$과 매우 비슷한 거동을 보일 것이므로, $\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n}$은 $\frac{1}{\sqrt{2}}$로 수렴할 것이라 예상할 수 있다. 직관적 사고를 통해 극한값을 예측할 수 있는 경우 예측을 먼저 한 후 샌드위치 정리를 사용하기 위해 부등식을 발생시켜 주어진 극한을 bound 시키면 된다.

즉, $\frac{1}{\sqrt{2k}} > \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$이므로 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} > b_n$이고 $\frac{b_n}{a_n} < \frac{1}{\sqrt{2}}$이다. 이제 $\frac{b_n}{a_n}$보다 작으면서 $\frac{1}{\sqrt{2}}$로 수렴하는 수열을 찾자.

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k+1}} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k+2}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}}$$

이므로

$$\frac{b_n}{a_n} > \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} - \frac{1}{\sqrt{2}\, a_n} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}\, a_n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}\, a_n} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}\, a_n}$$

이다. 한편 $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$이고, $\lim_{n \to \infty} H_n = \infty$이므로 $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$,

$$\lim_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}\, a_n} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}\, a_n} \right) = 0$$

이다. 따라서 샌드위치 정리에 의해 $\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$이다. ■

(참고) 조화급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$이 양의 무한대로 발산함을 보이는 방법은 꼭 기억해두자.

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$라 하자. $n = 2^m$ (m은 자연수)일 때

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^m}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2}$$

이다. 이때 $m \to \infty$이면 $n \to \infty$이고 $1 + \frac{m}{2} \to \infty$이므로 $H_n \to \infty$이다. ■

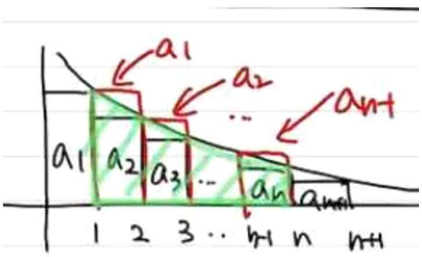
7. 다음 급수의 수렴과 발산을 판정하고, 그 근거를 논술하시오. [★★★★★]

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln n)}$$

대학 미적분학에서 배우는 적분판정법을 이용하는 문제이다. 적분판정법 자체는 고등학교 교육과정을 벗어나지만, 적분판정법의 내용 및 증명은 모두 고등학교 교육과정 내에서 설명할 수 있으므로 출제 가능하다. (다만, 만약에 출제가 된다면 적분판정법에 관한 제시문을 주거나 소문항을 통해 적분판정법의 아이디어를 이용하도록 유도할 것이다. 극한과 급수를 다룰 때에는 항상 그래프를 통해 부등식을 발생시킨 후 발산함을 보이거나, 샌드위치 정리를 이용하여 수렴값을 구하는 전형적인 패턴을 기억해두자.)

$f(n)=\dfrac{1}{n\ln(n)\ln(\ln n)}$이라 하면 n, $\ln n$, $\ln(\ln n)$은 모두 증가하는 수열이므로 f는 감소함수이다.

이제 $y=f(x)$의 그래프를 생각하자. 아래 그림과 같이 3 이상의 자연수 m에 대하여 $\displaystyle\int_3^m f(x)dx<\sum_{n=3}^{m}f(n)$이 성립한다.



한편 $m\to\infty$일 때 $\displaystyle\int_3^m f(x)dx$의 극한은

$$\lim_{m\to\infty}\int_3^m\frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln x)}\,dx=\lim_{m\to\infty}\left[\ln(\ln(\ln x))\right]_3^m$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left[\ln(\ln(\ln m))-\ln(\ln(\ln 3))\right]=\infty$$

이므로

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln n)}=\infty$$

이다. ■

8. 다음 중 함수 $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sin x)^n$에 대한 설명으로 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. [★★☆☆☆]

ㄱ. $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 정의된다.
ㄴ. f는 정의역에서 연속이다.
ㄷ. f는 연속인 모든 점에서 미분가능하다.

ㄱ. $x=\dfrac{3}{2}\pi$이면 $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^n$은 진동 발산하므로 거짓이다.

ㄴ. $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1)^n=1$이지만 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=0$이므로 $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 불연속이다.

ㄷ. $f(x)=\begin{cases}1 & (x=2n\pi+\dfrac{\pi}{2})\\ 0 & (x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2})\end{cases}$이므로 f가 연속인 구간에서 f는 상수함수이고 미분가능하다.

따라서 답은 ㄷ이다. ■

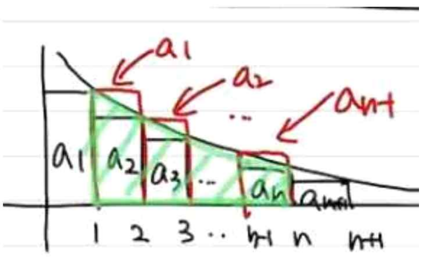
9. 다음 급수의 합이 수렴함을 보이고, 그 합이 $\frac{3}{2}$ 이하임을 증명하시오. [★★★★☆]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$$

$a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$이라 하면

$$a_n = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} < \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

이다. 한편 $f(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$은 $[1, \infty)$에서 감소하므로 $y = f(x)$의 그래프를 그리면 아래와 같다.



위 그림에서 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$a_n < \int_{n-1}^{n} f(x)dx$$

이므로

$$\sum_{k=2}^{n} a_k < \int_{1}^{n} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{1}^{n} x^{-\frac{3}{2}}dx$$

$$= -\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

이고, $\sum_{n=2}^{\infty} a_n < \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$이다. 한편 $a_n > 0$이므로 부분합 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$는 위로 막힌 증가수열이고, 수렴한다. (이는 유계인 단조수열은 반드시 수렴한다는 단조수렴정리에 근거하고 있지만, 이를 언급하지 않고 정성적으로만 설명해도 충분하다. 교과서에도 단조수렴 정리의 언급은 없지만 직관적 이해를 돕기 위한 설명은 나와 있다.)

또한, $a_1 < \frac{1}{2}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

이다. ■

($a_1 = \sqrt{2}-1$을 대입한다면 우변의 값을 $\frac{3}{2}$보다 더 작게 만들 수 있으며, 값이 작아질수록 문제는 어려워진다.)

10. 양의 실수들의 수열 $\{x_n\}$과 자연수 n에 대하여

$(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}x_n-1) \le 0$이고 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$

일 때, 수열 $\{x_n\}$이 수렴함을 증명하시오.

[★★★★★]

수열이 수렴함을 보이는 가장 대표적인 방법은 단조수렴정리를 이용하기 위해 주어진 수열이 유계(범위가 정해져 있음)이고 단조 증가 또는 단조 감소임을 보이는 것이다. 하지만 수열 $\{x_n\}$의 거동을 살펴보면 1을 기점으로 좌우로 진동할 수 있으므로 증가 또는 감소하지 않으면서 수렴하는 형태가 된다. 이러한 수열의 수렴성을 보이기 위해 단조 증가 또는 감소하는 새로운 수열을 정의하여 그 수열의 수렴성을 보이면 된다.

아래 풀이에서는 $|\ln x_n|$을 새로운 수열로 치환하여 증명하였지만, $\max\left\{x_n, \frac{1}{x_n}\right\}$과 $x_n + \frac{1}{x_n}$ 등으로 치환하는 방법도 가능하다.

$(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}x_n-1) \le 0$이고 $x_n > 0$이므로 양변을 x_n으로 나누면

$$(x_{n+1}-x_n)\left(x_{n+1}-\frac{1}{x_n}\right) \le 0$$

이므로

$$\min\left\{x_n, \frac{1}{x_n}\right\} \le x_{n+1} \le \max\left\{x_n, \frac{1}{x_n}\right\}$$

이다. 만약 자연수 m이 존재하여 $x_m = 1$이라면 $1 \le x_{m+1} \le 1$에서 $x_{m+1} = 1$이고, 마찬가지로 $n \ge m$인 모든 자연수 n에 대하여 $x_n = 1$이므로 $\{x_n\}$은 1로 수렴하고 증명이 완료된다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $x_n \ne 1$인 경우만 고려하자. $x_n > 1$인 경우

$$\frac{1}{x_n} \le x_{n+1} \le x_n$$

이고, $x_n < 1$인 경우

$$x_n \le x_{n+1} \le \frac{1}{x_n}$$

이므로 $y_n = |\ln x_n|$이라 하면 다음이 성립한다.

$$y_{n+1} = |\ln x_{n+1}| \le |\ln x_n| = y_n$$

따라서 수열 $\{y_n\}$은 감소한다. 한편 $x_n > 1$인 경우와 $x_n < 1$인 경우에 대하여 $y_n > 0$은 항상 성립하므로 유계인 단조 감소 수열 $\{y_n\}$은 수렴한다.

이제 수열 $\{y_n\}$이 수렴하는 값을 α라 하면 수렴하는 극한의 성질에 의해 수열 $\{x_n\}$은 e^{α} 또는 $e^{-\alpha}$으로 가까워진다. $x_n = e^{(-1)^n \alpha}$과 같이 두 값을 번갈아 가진다면 수열 $\{y_n\}$은 수렴하지만 수열 $\{x_n\}$이 수렴한다고 할 수 없지만, 문제의 조건 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$을 이용하면 이러한 상황은 불가능하다는 것을 증명할 수 있다.

각각 e^{α}과 $e^{-\alpha}$으로 수렴하는 수열 $\{x_n\}$의 부분수열 $\{x_p\}$과 $\{x_q\}$을 생각하자. 자연수 p와 q는 각각 집합 P와 Q의 원소들이며, $P \cap Q = \varnothing$이고 $P \cup Q = \mathbb{N}$이다. (단, $\mathbb{N}$은 자연수 전체의 집합이다.)

이때 각각의 부분수열이 서로 다른 값으로 수렴해야 하므로 P와 Q는 무한히 많은 원소를 가져야 한다. $n \in P$이고 $n+1 \in Q$인 자연수를 '바뀜수'라 정의하자. 바뀜수가 유한하다면 마지막 바뀜수 이후 모든 자연수는 Q의 원소가 될 것이므로 집합 P는 유한 집합이 되어 모순이다. 따라서 바뀜수는 무한히 많이 존재하며, 모든 자연수들은 최소 1 만큼 떨어져 있으므로 바뀜수들의 수열은 양의 무한대로 발산한다.

즉, 아무리 큰 양수 M을 생각해도 이보다 큰 바뀜수 N이 존재하여 $N \in P$이고 $N \in Q$가 성립한다.

한편 $\{x_p\}$는 e^{α}으로 수렴하고 $\{x_q\}$는 $e^{-\alpha}$으로 수렴하므로 P의 원소 중 충분히 큰 원소 p_0가 존재하여 $p > p_0$일 때 x_p와 e^{α}의 차이는 충분히 작아지고, Q의 원소 중 충분히 큰 원소 q_0가 존재하여 $q > q_0$일 때 x_q와 $e^{-\alpha}$의 차이는 충분히 작아진다.

앞선 논리에 의해 p_0, q_0 중 큰 값보다도 큰 바뀜수 n_0가 항상 존재하고, 이때 $n_0 \in P$, $n_0+1 \in Q$이므로 $\frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}}$의 값은 $\frac{e^{-\alpha}}{e^{\alpha}} = e^{-2\alpha}$와 매우 근접해진다. 하지만 문제의 조건에 의해 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$이므로 이는 모순이고, 따라서 수열 $\{x_n\}$은 e^{α} 또는 $e^{-\alpha}$ 중 오직 하나의

값으로만 다가가 수렴한다. ■

(보충 설명)

$\dfrac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}}$의 값이 $\dfrac{e^{-\alpha}}{e^{\alpha}}=e^{-2\alpha}$와 매우 근접해지는 것이 왜 모순으로 이어지는지에 대한 보충 설명이다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$이라는 것은 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$과 1의 차이를 매우 작게 만들 수 있다는 것을 의미하며, 더 구체적으로 아무리 작은 양수 ε을 제시하더라도 충분히 큰 자연수 N이 존재하여 $n>N$일 때마다 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$과 1의 차이가 ε보다 작아지게 할 수 있다는 뜻이다.

하지만 충분히 작은 양수 ε이 주어졌을 때 자연수 N을 아무리 크게 잡아도 $n_0>N$인 바뀜수 n_0가 항상 존재하고, 이때 $\dfrac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}}$과 1의 차이는 ε보다 클 것이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$이라는 조건과 모순이 발생하는 것이다.

수열 $\{y_n\}$의 수렴값인 α는 고정된 양의 실수이므로 바뀜수 n_0가 충분히 커진다면 $\dfrac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}}$과 $\dfrac{e^{-\alpha}}{e^{\alpha}}=e^{-2\alpha}$의 차이를 충분히 작게 만들 수 있고, 실제로도 $\dfrac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}}$은 $\dfrac{e^{-\alpha}}{e^{\alpha}}=e^{-2\alpha}$에 무한히 다가간다.

따라서 바뀜수 n_0가 무한히 커짐에 따라 1과 $\dfrac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}}$의 차이는 $\left|1-e^{-2\alpha}\right|$라는 고정된 상수를 향해 다가가고, 이 상수보다 충분히 작은 양수 ε을 설정한다면 $\dfrac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}}$과 1의 차이를 ε보다 작게 만들 수 없어 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$에 모순이다.

11. 다음 급수의 합을 구하여라. [★★★★★]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \sec^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$a_n = \dfrac{1}{4^n} \sec^2\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)$라 하자. 이때 배각 공식에 의해

$$\csc^2\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = \frac{1}{4}\csc^2\left(\frac{\pi}{2^3}\right)\sec^2\left(\frac{\pi}{2^3}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2^3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2^3}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2^3}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2^3}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\csc^2\left(\frac{\pi}{2^3}\right) + \frac{1}{4}\sec^2\left(\frac{\pi}{2^3}\right) = \frac{1}{4}\csc^2\left(\frac{\pi}{2^3}\right) + a_1$$

이다. 같은 방법으로

$$\frac{1}{4}\csc^2\left(\frac{\pi}{2^3}\right) = \frac{1}{16}\csc^2\left(\frac{\pi}{2^4}\right) + a_2$$

이므로

$$\csc^2\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = \frac{1}{4^2}\csc^2\left(\frac{\pi}{2^4}\right) + a_1 + a_2$$

이고,

$$\csc^2\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = \frac{1}{4^n}\csc^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

이다. (이는 축차 대입을 이용하여 쉽게 보일 수 있다.)

따라서 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합 $S_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$는

$$S_n = \csc^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4^n}\csc^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

이고, 급수의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[2 - \frac{1}{4^n \sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[2 - \frac{16}{\pi^2} \times \frac{(\pi/2^{n+2})^2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}\right]$$

이다. 한편 $\dfrac{\pi}{2^{n+2}} = t$라 하면 $n \to \infty$일 때 $t \to 0+$

이고 $\displaystyle\lim_{t\to 0+}\frac{t}{\sin t} = 1$이므로 답은

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}\sec^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = 2 - \frac{16}{\pi^2}$$

이다. ■

12. $\int_0^1 \frac{x^{4n}}{1+x^2}dx$를 이용하여 다음 급수의 합을 구하여라. [★★★★★]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

$a_n = \int_0^1 \frac{x^{4n}}{1+x^2}dx$라 하자.

$$a_n - a_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^{4n-4}(x^4-1)}{1+x^2}dx = \int_0^1 x^{4n-4}(x^2-1)dx$$

$$= \int_0^1 (x^{4n-2} - x^{4n-4})dx = \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n-3}$$

이므로 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-1}\right)$이라 하면

$$S_n = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{n-1} - a_n)$$

$$= a_0 - a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx - \int_0^1 \frac{x^{4n}}{1+x^2}dx$$

이다. 한편 $0 < x < 1$일 때

$$0 < \frac{x^{4n}}{1+x^2} < \frac{x^{4n}}{1}$$

이므로

$$0 < \int_0^1 \frac{x^{4n}}{1+x^2}dx < \int_0^1 x^{4n}dx = \frac{1}{4n+1}$$

이고, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n+1} = 0$이므로 샌드위치 정리에 의해

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^{4n}}{1+x^2}dx = 0$$

이다. 따라서

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

이고, $x = \tan u$, $dx = \sec^2 u du$로 치환하면

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 u}{1+\tan^2 u}du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,du = \frac{\pi}{4}$$

이다. ■

(참고, 교육과정 외)

$\tan x$의 정의역을 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$로 제한하면 이 범위에서 $\tan x$는 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$를 실수 전체로 대응시키는 일대일대응 함수가 되고, 따라서 역함수를 정의할 수 있다. 이 역함수를 $\arctan(x)$ 또는 $\tan^{-1}(x)$라 표기한다.

주어진 급수는 $\arctan(x)$의 맥클로린 급수에 $x = 1$을 대입한 것이다. 실제로 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$일 때

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

이 성립하며, 문제의 급수는 $x = 1$을 대입한 것이다. 따라서 $\arctan(x)$의 급수 전개식을 알고 있었다면 문제를 보자마자 답이 $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$임을 알 수 있다.

(물론 논술이나 심층면접에서 맥클로린 급수와 테일러 급수를 이용하면 점수를 거의 받지 못한다. 하지만 정확한 답을 미리 알고 시작한다는 면에서 매우 유리하게 작용할 수 있다.)

(참고 2) $\sin x$, $\cos x$, 그리고 e^x의 맥클로린 급수 식은 각각 다음과 같고, 이들의 수렴 반경은 모두 무한대이다. (즉, 모든 실수 x에 대하여 다음 식이 항상 성립한다고 이해하면 된다. 삼도극 근사의 본질은 이 급수들이다. 급수들의 각 항을 미분하여 $(\sin x)' = \cos x$, $(e^x)' = e^x$임을 직접 확인해볼 수 있다.)

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

13. (보너스 문제) 다음 물음에 답하시오. (단, 문제의 함수들은 모두 미분가능한 연속함수이다.)

(1) 기함수의 도함수는 우함수이고, 우함수의 도함수는 기함수임을 증명하시오.

(2) 기함수의 부정적분은 우함수인가? 참인 경우 증명을, 거짓인 경우 반례를 제시하시오.

(3) 우함수의 부정적분은 기함수인가? 참인 경우 증명을, 거짓인 경우 반례를 제시하시오.

(1) 기함수의 정의는 $f(-x) = -f(x)$인 것이므로 양변을 미분하면 $-f'(-x) = -f'(x)$, $f'(-x) = f'(x)$이다. 따라서 기함수의 도함수는 우함수이다.

마찬가지로 우함수의 정의는 $f(-x) = f(x)$인 것이므로 양변을 미분하면 $-f'(-x) = f'(x)$이고, 우함수의 도함수는 기함수가 된다. ■

(2) 기함수인 $f(x) = \dfrac{1}{x}$의 한 부정적분

$F(x) = \begin{cases} \ln(x) & (x > 0) \\ \ln(-x) + 17 & (x < 0) \end{cases}$ 는 우함수가 아니므로 거짓이다. ■

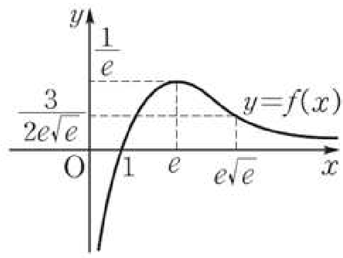
(정의역이 끊어진 형태이기 때문에 이러한 반례가 발생할 수 있으며, 정의역이 연결된 집합이라는 조건이 주어졌을 때 참이 된다.)

(3) 우함수인 $y = 3x^2$의 한 부정적분 $3x^3 - 2$는 기함수가 아니므로 거짓이다. ■

14. (보너스 문제) 10000^{9999}과 9999^{10000}의 대소를 비교하시오.

양변에 ln을 씌우는 전형적인 문제이다.

$0 < a < b$일 때 a^b와 b^a의 대소를 비교하기 위해 양변에 ln을 씌우면 $b\ln a$와 $a\ln b$의 대소를 비교하는 문제가 된다. $ab > 0$이므로 양변을 ab로 나누면 $\dfrac{\ln a}{a}$와 $\dfrac{\ln b}{b}$의 대소를 비교하는 문제로 바뀌며, 미분을 통해 $y = \dfrac{\ln x}{x}$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



이때 $9999 > e$이고 이 구간에서 f는 감소하므로

$$\frac{\ln 9999}{9999} > \frac{\ln 10000}{10000}, \quad 10000\ln 9999 > 9999\ln 10000$$

이고

$$9999^{10000} > 10000^{9999}$$

이다. ■

(구간 $(1, e)$에서는 대소 관계가 반전되므로 무조건 지수가 큰 것이 더 크다고 암기하면 곤란하다. 실제로 $2^4 = 4^2$과 같이 값이 완전히 같은 경우도 있으며, 이를 이용하여 $(\sqrt{3})^{\sqrt{14}}$과 $(\sqrt{14})^{\sqrt{3}}$의 대소, 또는 e^π과 π^e의 대소를 비교하라는 문제를 출제할 수도 있다.