

<수학(하) 기말 테스트 문제지>

객관식 15문항[61점]/서술형 6문항[39점]

1. 철수랑 영희를 포함한 사람 6명이 있다. 이때, 철수랑 영희를 서로 이웃하게 일렬로 세우는 경우의 수는? [3.2점]

- ① 60 ② 120 ③ 180 ④ 240 ⑤ 360

2. 같은 종류의 사탕 4개를 두 주머니 A와 B에 각각 최소 1개씩 넣는 경우의 수는?

[3.3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 14

3. 분자와 분모가 모두 일차식인 유리함수 $f(x)$ 는 $x \neq p$ 일 때 $f(x) + f(4-x) = 2$ 를 만족한다. 설명으로 옳은 것을 아래에서 고르면? [3.7점]

- | |
|----------------------------------------------|
| ㄱ. 상수 k 에 대해 $f(k) = 1$ 을 만족하는 k 가 존재한다. |
| ㄴ. $p = 2$ 이다. |
| ㄷ. $f(x)$ 는 직선 $y = -x + 3$ 에 대해 대칭이다. |

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

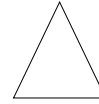
4. 무리함수 $y = \sqrt{ax}$ ($x > 0$)와 직선 $y = x - k$ 가 있다. 이때, 두 함수의 교점의 개수가 2가 되도록 하는 정수 k 의 개수가 3이 되도록 하는 가능한 정수 a 값의 합은? [3.8점]

- ① 54 ② 58 ③ 62 ④ 66 ⑤ 70

5. 자연수 x, y, z 에 대해 $1 < x + y + z < 9$ 를 만족하는 (x, y, z) 의 개수는? [3.5점]

- ① 56 ② 70 ③ 120 ④ 140 ⑤ 210

7. 다음과 같은 이등변 삼각형 모형의 탁자가 있다.



각 변에는 2명씩 앉을 수 있다. 2명의 남자 A, B, 2명의 여자 A, B, 구분이 안되는 유령 2명이 탁자에 모두 앉는 경우의 수는?

(회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다)

[3.9점]

- ① 120 ② 180 ③ 240 ④ 360 ⑤ 720

6. 유리함수 $y = \frac{k}{x-2} + 3$ 이 3개의 사분면을 지나도록 하는 양의 정수 k 의 개수는?

[3.6점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

8. 유리함수 $y = \frac{2x+2}{x-1}$ 이 있다. $a < 1$ 인

유리함수 위의 점 $P(a, b)$ 에 대해, 점 P 에서 두 점근선에 내린 수선의 발을 M, N , 그리고 두 점근선의 교점을 Q 라 하면, 사각형 $PMQN$ 의 둘레의 길이의 최솟값은?

[4.1점]

- ① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

9. 'I♡INSUN'을 배열할 때, I와 ♡가 서로 이웃하도록 배열하는 경우의 수는?

[4.2점]

- ① 600 ② 660 ③ 720 ④ 840 ⑤ 900

11. 정사면체의 여섯 개의 모서리 가운데 몇 개의 모서리를 골라 붉은색으로 칠할 때, 붉은색의 모서리들을 따라 네 꼭짓점이 모두 연결되는 경우의 수는? [4.3점]

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다)

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

10. 정의역이 $\{x|x \geq -1\}$ 인 함수

$f(x) = \frac{4x+a}{x+2}$ 의 지역의 원소 중 정수의

개수가 오직 1개일 때, 가능한 모든 정수 a 값의 합은? [4.4점]

- ① 32 ② 24 ③ 17 ④ 16 ⑤ 15

12. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대해 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 다음 조건을 만족한다.

- 집합 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대해 $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$ 이다.
- $1 \leq x \leq 4$ 에 대해 $f(f(x)) = x$ 이다.

이를 만족하는 함수 f 의 개수는? [4.7점]

- ① 32 ② 40 ③ 48 ④ 56 ⑤ 64

13. $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하고, a, b, c 는 $|a| \leq 20, |b| \leq 20, |c| \leq 20$ 인 정수이다. 이때, $p(m) = p(4)$ 를 만족하는 4가 아닌 정수 m 이 유일하게 되는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는? [4.6점]
- ① 720 ② 738 ③ 760 ④ 779 ⑤ 820

15. 어떤 게임에서는 챔피언한테 아이템을 다음과 같이 장착할 수 있다.

- 재료 아이템과 완성 아이템이 있다.
- 한 챔피언에 최대 2개의 아이템을 장착할 수 있다.
- 재료 아이템은 최대 1개만 장착이 가능하다.
- 재료 아이템 2개를 조합하면 완성 아이템이 된다.
- 재료 아이템을 다르게 조합하면 무조건 다른 완성 아이템이 된다.
- 단, 재료 아이템 중 A 아이템은 2개를 조합하면 특수한 아이템 A*이 된다. A*는 하나만 장착해도 아이템 슬롯 2개를 차지하게 된다.
- 재료 아이템의 종류는 A부터 H까지 8개이다.
- 장착 순서는 고려하지 않는다.

아이템 슬롯 2칸을 전부 다 차지하게 장착한다고 할 때, 재료 아이템 A 3개, B 2개, C 2개, E 1개, F 1개로 챔피언한테 아이템을 장착하는 경우의 수는? [4.9점]

- ① 117 ② 122 ③ 127 ④ 128 ⑤ 133

14. 두 문자 a, b 중에서 중복을 허락하여 8개를 택해 일렬로 나열할 때, aba 꼴의 문자열을 포함하지 않는 경우의 수는? [4.8점]
- ① 102 ② 106 ③ 110 ④ 114 ⑤ 118

[서술형 문제]

풀이과정 상세히 적을 것.

1. 제시문을 읽고, 함수 $f(x)$ 에 대해 물음에 답하시오.

(미분, 적분, 삼각치환 등 이용시 무조건 0점 처리, 답만 적으면 0점)

방정식 $f(x) = g(x)$ 의 해는 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 교점의 x좌표이다.

위 제시문을 잘 활용하여, $-1 \leq x \leq 1$ 인 x 에 대하여, $y = 4x - \sqrt{1-x^2}$ 의 치역을 구하고, 그 과정을 서술하시오.

[7점]

2. 함수 $f(x) = \frac{ax+1}{bx+1}$ 에 대해, 실수 x 는 항상 $(f \circ f \circ f)(x) = x$ 를 만족한다. 이때, 실수 a, b 에 대해 b 의 최댓값을 구하는 과정을 서술하시오. [6점]

3. ${}_n C_k + {}_n C_{k+1} = {}_{n+1} C_{k+1}$ 임을 이용하여,

$1 \leq k \leq n$ 인 모든 자연수 n, k 에 대해

$${}_{3n+3} C_{3k} = {}_{3n} C_{3k-3} + 3 \times {}_{3n} C_{3k-2} + 3 \times {}_{3n} C_{3k-1} + {}_{3n} C_{3k}$$

를 보이시오. [5점]

5. 길에 1번부터 2020번까지의 램프가 있다. 램프의 버튼을 누르면 꺼진 램프는 켜지고, 켜진 램프는 꺼진다. 번호가 k 인 학생은 길을 지나가며 k 의 배수번째의 램프의 버튼을 모두 누른다. 처음에 모든 램프가 꺼져있을 때, 물음에 답하시오. [12점]

(1) 번호가 1번부터 2020번까지의 학생들이 모두 길을 지나갈 때, 켜진 램프의 개수를 구하는 과정을 서술하시오. [3점]

4. A와 B 두 사람이 카드 게임을 해 12점을 먼저 내면 이기는 게임을 진행 중이다. 이기면 2점, 지면 1점을 얻고, 3의 배수번째의 판에서는 이기면 5점을 얻고, 지면 그동안 쌓은 모든 점수를 잃게 된다. A가 첫 번째 판을 이겼을 때, 물음에 답하시오. [9점]

(1) 6판 안에 승부가 나는 경우의 수를 구하시오. [5점]

(2) 번호가 4번부터 2018번까지의 학생이 모두 지나가면 켜져 있는 램프는 총 몇 개인지 구하는 과정을 서술하시오. [9점]

(2) A가 이기는 경우의 수를 구하는 것이 가능하다면 구하고, 구하는 것이 불가능하다면 왜 그런지 설명하시오.

(단, $|r| < 1$ 이고 $S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$ 일 때,

$$S = \frac{a}{1-r} \text{이다 (비기는 경우는 없다.) [4점]}$$