공통과목

---

9. 함수 $f(x)=x^2+x$에 대하여 $5\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 (5x+f(x))dx$의 값은?

$$5\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 (5x+f(x))dx=4\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 5xdx=4\times\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1-\frac{5}{2}=\frac{10}{3}-\frac{5}{2}=\frac{5}{6}$$

---

10. $\angle\mathrm{A}>\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}:1$, $\overline{\mathrm{AH}}=2$이고, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 50π일 때, 선분 BH의 길이는?

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$이므로

$\angle\mathrm{A}=\theta$라 할 때 $\overline{\mathrm{BC}}=10\sqrt{2}\sin\theta$이므로 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AH}}\times\overline{\mathrm{BC}}=10\sqrt{2}\sin\theta$이다.

또한 $\overline{\mathrm{AC}}=x$라 할 때 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}:1$에서 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이는 $\frac{1}{2}x\times\sqrt{2}x\times\sin\theta$이므로 $x=2\sqrt{5}$이다.

따라서 선분 AH의 길이가 $2\sqrt{10}$이므로 선분 BH의 길이는 6이다.

---

11. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 위치가 각각

$x_1 = t^2 + t - 6,\ x_2 = -t^3 + 7t^2$이다.

두 점 P, Q의 위치가 같아지는 순간 두 점 P, Q의 가속도를 각각 $p,\ q$라 할 때, $p - q$의 값은?

시각 t $(t \geq 0)$에서의 점 Q에 대한 점 P의 상대적인 위치는 $x = t^3 - 6t^2 + t - 6 = (t-6)(t^2+1)$이다.

따라서 두 점 P, Q의 위치가 같아지는 순간 시각은 $t = 6$이다.

$\dfrac{d}{dt}\{(t-6)(t^2+1)\} = (t^2+1) + 2(t-6)t$이고 $\dfrac{d}{dt}\{(t^2+1) + 2(t-6)t\} = 2t + 2(2t-6)$이므로

$p - q$의 값은 $12 + 12 = 24$이다.

---

12. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$를

만족시킨다. $b_2 = -2,\ b_3 + b_7 = 0$일 때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제9항까지의 합은?

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

b_n의 값은 n이 홀수일 때 $a_1 + \dfrac{n-1}{2} \times d$이며 n이 짝수일 때 $b_n = -\dfrac{n}{2} \times (d)$이다.

즉, 수열 b_n의 홀수 번째 항을 나열한 것과 짝수 번째 항을 나열한 것은 각각 등차수열을 이룬다.

따라서 $b_1 + b_3 + b_5 + b_7 + b_9 = \dfrac{5}{2}(b_3 + b_7) = 0$이다.

$b_2 = -d = -2$에서 $d = 2$이므로 $b_2 + b_4 + b_6 + b_8 = (-1-2-3-4)d = -20$이다.

즉 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제9항까지의 합은 -20이다.

13. 함수 $f(x)=\begin{cases} -x^2-2x+6 & (x<0) \\ -x^2+2x+6 & (x \geq 0) \end{cases}$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점을 P, Q라 하고,

상수 k $(k>4)$에 대하여 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 R이라 하자.

곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=k$ 및 선분 QR로

둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=2B$일 때, k의 값은? (단, 점 P의 x좌표는 음수이다.)

$\int_0^k -x^2+2x+6=-\frac{k^3}{3}+k^2+6k=-\frac{k}{3}(k+3)(k-6)=0$이므로 $k=6$이다.

---

14. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기는 3이다.
(나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n\times\sqrt{10}$

중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표

중 큰 값을 x_n이라 하자. $x_1+x_2+x_3$의 값은?

A_n의 x좌표를 a, B_n의 x좌표를 b라 할 때 일반성을 잃지 않고 $a<b$인 경우를 고려하자.

이때 $a+n=b$, $2^a+3n=2^b$이며 주어진 원이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 x_n은 B_n의 y좌표이다.

$2^a+3n=2^{b-n}+3n=2^b$에서 $2^b\left(1-2^{-n}\right)=3n$이므로 $x_n=2^b=\dfrac{3n}{1-2^{-n}}=\dfrac{3n\times 2^n}{2^n-1}$이다.

$\therefore\ x_1+x_2+x_3=(3\times 2)+\left(\dfrac{6\times 4}{3}\right)+\left(\dfrac{9\times 8}{7}\right)=\dfrac{170}{7}$

15. 두 다항함수 $f(x),\ g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다. $\int_0^3 g(x)dx$의 값은?

(가) $\int_1^x tf(t)dt + \int_{-1}^x tg(t)dt = 3x^4 + 8x^3 - 3x^2$

(나) $f(x) = xg'(x)$

조건 (가)에서 양변을 미분하면 $xf(x) + xg(x) = 12x^3 + 24x^2 - 6x$이므로

$f(x) + g(x) = 12x^2 + 24x - 6 = xg'(x) + g(x) = \{xg(x)\}'$이다.

이때 $g(x)$가 다항함수이므로 $xg(x) = 4x^3 + 12x^2 - 6x,\ g(x) = 4x^2 + 12x - 6$이다.

$\therefore \int_0^3 4x^2 + 12x - 6dx = \left[\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 6x\right]_0^3 = 36 + 54 - 18 = 72$

---

20. 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = \begin{cases} \sin x - 1 & (0 \le x < \pi) \\ -\sqrt{2}\sin x - 1 & (\pi \le x \le 2\pi) \end{cases}$가 있다.

$0 \le t \le 2\pi$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x) = f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록

하는 모든 t의 값의 합은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

$f(t) = -1$ 또는 $f(t) = 0$인 경우 주어진 조건을 만족한다.

$f(t) = -1$인 모든 t의 값의 합은 $0 + \pi + 2\pi = 3\pi$이며 $f(t) = 0$인 모든 t의 값의 합은 $\frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7}{2}\pi$

이므로 $3\pi + \frac{7}{2}\pi = \frac{13}{2}\pi = \frac{q}{p}\pi$이다. $\therefore\ p = 2,\ q = 13,\ p + q = 15$

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여

$2k-8 \le \dfrac{f(k+2)-f(k)}{2} \le 4k^2+14k$를 만족시킬 때, $f'(3)$의 값을 구하시오.

최고차항의 계수가 a인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'\left(\dfrac{\beta+\alpha}{2}\right)+\dfrac{a}{4}(\beta-\alpha)^2$

$proof$: 함수 $f'(x)$가 최고차항의 계수가 $3a$인 이차함수이므로

두 점 $(\alpha,\ f'(\alpha))$, $(\beta,\ f'(\beta))$과 각각의 점에서 x축에 내린 수선의 발에 대해

네 점을 이은 사각형의 넓이는 $\dfrac{f'(\alpha)+f'(\beta)}{2}\times(\beta-\alpha)=\displaystyle\int_\alpha^\beta f'(t)dt+\dfrac{a}{2}(\beta-\alpha)^3$이다.

한편 $f'(x)$의 이차항의 계수를 고려하였을 때 $\dfrac{f'(\alpha)+f'(\beta)}{2}=f'\left(\dfrac{\beta+\alpha}{2}\right)+\dfrac{3a}{4}(\beta-\alpha)^2$이다.

따라서 $\displaystyle\int_\alpha^\beta f'(t)dt+\dfrac{a}{2}(\beta-\alpha)^3=f'\left(\dfrac{\beta+\alpha}{2}\right)+\dfrac{3a}{4}(\beta-\alpha)^2$이다.

$2k-8=4k^2+14k$일 때 $4k^2+12k+8=4(k+1)(k+2)=0$에서 $f'(0)+1=-10,\ f'(-1)+1=-12$이다.

$f'(x)+1=3x(x+1)+2x-10$이므로 $f'(3)=36-4-1=31$이다.

---

22. 양수 k에 대하여 $a_1=k$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_2 \times a_3 < 0$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\left(a_{n+1}-a_n+\frac{2}{3}k\right)(a_{n+1}+ka_n)=0$이다.

$a_5=0$이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합을 구하시오.

조건 (나)에서 모든 자연수 n이 $a_{n+1}=a_n-\frac{2}{3}k$ 또는 $a_{n+1}=-ka_n$을 만족한다.

즉 $a_2=\frac{1}{3}k$일 때 a_3의 값은 $-\frac{1}{3}k$ 또는 $-\frac{1}{3}k^2$이며 $a_2=-k^2$일 때 a_3의 값은 $-k^2-\frac{2}{3}k$ 또는 k^3이다.

한편 $a_2=-k^2<0$이고 $a_3=-k^2-\frac{2}{3}k<0$인 경우 조건 (가)를 만족하지 않는다.

따라서 가능한 a_3의 값을 모두 나열하면 $-\frac{1}{3}k$, $-\frac{1}{3}k^2$, k^3이다.

이때 $a_4=a_3-\frac{2}{3}k$ 또는 $a_4=-ka_3$이므로 $k^2 \neq \frac{2}{3}$인 경우 a_4의 값은 0이 아니다.

또한 $a_4 \neq 0$이고 $a_5=-ka_4$인 경우 $a_5 \neq 0$이므로 $a_4 \neq 0$이고 $a_5=0$이면 $a_5=a_4-\frac{2}{3}k$이다.

이때 $a_5=0$이면 $a_4=\frac{2}{3}k>0$이다.

따라서 $k^2 \neq \frac{2}{3}$이고 a_4의 값이 음수가 아닌 경우에 대해 (즉, a_4의 값이 양수인 경우에 대해)

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k$인 경우를 살펴보면 다음과 같다.

a_3	a_4	a_5
$-\frac{1}{3}k$	$\frac{1}{3}k^2$	$\frac{1}{3}k^2-\frac{2}{3}k$ $\cdots$ ①
$-\frac{1}{3}k^2$	$\frac{1}{3}k^3$	$\frac{1}{3}k^3-\frac{2}{3}k$ $\cdots$ ②
k^3	$k^3-\frac{2}{3}k$	$k^3-\frac{4}{3}k$ $\cdots$ ③

$a_5=0$일 때 ①에서 $k^2=4$, ②에서 $k^2=2$, ③에서 $k^2=\frac{4}{3}$이다.

한편 $k^2=\frac{2}{3}$이면 $a_4=0$이고 $a_5=-ka_4$이면 $a_5=0$이므로 주어진 조건을 만족한다.

따라서 $a_5=0$이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합은 $4+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=8$이다.

미적분

---

28. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수를 갖고,

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를 $g(x)=f'(2x)\sin\pi x+x$라 하자.

함수 $g(x)$는 역함수 $g^{-1}(x)$를 갖고, $\int_0^1 g^{-1}(x)dx=2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x dx+\frac{1}{4}$을 만족시킬 때,

$\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x dx$의 값은?

$g(0)=0$이고 $g(1)=1$이므로 $\int_0^1 g(x)dx+\int_0^1 g^{-1}(x)dx=1$이다.

즉 $1-\left(\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x+xdx\right)=2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x dx+\frac{1}{4}$이므로 $\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x dx=\frac{1}{12}$이다.

이때 $\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x dx=\int_0^2\left\{f'(t)\sin\frac{\pi t}{2}\right\}\times\frac{1}{2}dt$이므로 $\int_0^2 f'(t)\sin\frac{\pi t}{2}dt=\frac{1}{6}$이다.

즉 $\left[f(t)\sin\frac{\pi t}{2}\right]_0^2-\int_0^2\left\{f(t)\cos\frac{\pi t}{2}\right\}dt\times\frac{\pi}{2}dt=\frac{1}{6}$에서 $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x dx=-\frac{1}{3\pi}$이다.

---

29. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 합을 S_m이라 하자.

모든 자연수 m에 대하여 $S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m+1}{n(n+m+1)}$일 때, $a_1 + a_{10} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m+1}{n(n+m+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+m+1} \right\} = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k}$이며

$a_m = S_m - S_{m-1} = \frac{1}{m+1} \ (m \geq 2)$, $a_1 = S_1 = \frac{3}{2}$이므로 $a_1 + a_{10} = \frac{3}{2} + \frac{1}{11} = \frac{35}{22}$이다.

$\therefore \ p = 22, \ q = 35, \ p+q = 57$

---

30. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x) = (k - |x|)e^{-x}$이라 하자.

실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $F(x)$에 대하여

$F(0)$의 최솟값을 $g(k)$라 하자.

모든 실수 x에 대하여 $F'(x) = f(x)$이고 $F(x) \geq f(x)$이다.

$g\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{3}{2}\right) = pe + q$일 때, $100(p+q)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x \to \infty} xe^{-x} = 0$이고, p와 q는 유리수이다.)

$x \ge 0$일 때 $F(x)=(x-k+1)e^{-x}+C$ (단, C는 적분상수)라 하면 $F(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$x<0$일 때 $F(x)=(-x-k-1)e^{-x}+C+2$이다.

이때 $F(x)-f(x)=\begin{cases}(2x-2k+1)e^{-x}+C & (x \ge 0)\\ (-2x-2k-1)e^{-x}+C+2 & (x<0)\end{cases}$이고 $F(x)-f(x) \ge 0$이다.

$k=\frac{1}{4}$일 때 $F(x)-f(x)=\begin{cases}\left(2x+\frac{1}{2}\right)e^{-x}+C & (x \ge 0)\\ \left(-2x-\frac{3}{2}\right)e^{-x}+C+2 & (x<0)\end{cases} \ge 0$이다.

이때 함수 $F(x)-f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $C+\frac{1}{2}$을 가지므로 $C+\frac{1}{2} \ge 0$이며

동시에 $x \to \infty$에서 $F(x)-f(x) \ge 0$이므로 $C \ge 0$이다.

따라서 $k=\frac{1}{4}$일 때 $C \ge 0$이며 $C=0$인 경우에서 $g\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$이다.

$k=\frac{3}{2}$일 때 $F(x)-f(x)=\begin{cases}(2x-2)e^{-x}+C & (x \ge 0)\\ (-2x-4)e^{-x}+C+2 & (x<0)\end{cases} \ge 0$이다.

이때 $x=-1$에서 극솟값을 가지므로 $-2e+C+2 \ge 0$에서 $C \ge 2e-2$이다.

따라서 $k=\frac{3}{2}$일 때 $C \ge 2e-2$이며 $C=2e-2$인 경우에서 $g\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}+1+2e-2=2e-\frac{5}{2}$이다.

$\therefore\ g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)=2e-\frac{7}{4}=pe+q,\ 100(p+q)=100\left(2-\frac{7}{4}\right)=25$