제 2 교시

# 수학 영역

**5지선다형**

**1.** $2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

**2.** 함수 $f(x)$가

$x^3-x^2+1$

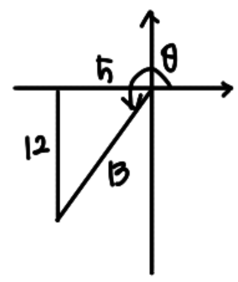
$$f'(x)=3x^2-2x, \quad f(1)=1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [2점]

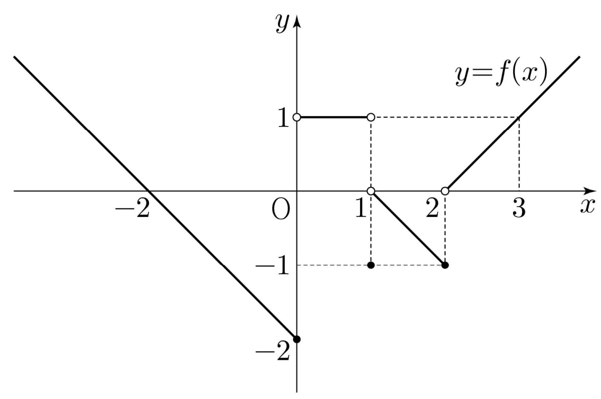
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

**3.** $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 $\theta$에 대하여 $\tan\theta=\frac{12}{5}$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{17}{13}$ ② $-\frac{7}{13}$ ③ 0 ④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{17}{13}$




**4.** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




$-2$ $0$

$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 2+} f(x)$의 값은? [3점]

① $-2$ ② $-1$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

**5.** 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2+3)f(x)$$ ↪ $2xf(x)+(x^2+3)f'(x)$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$\therefore g'(1)=2\times2+4\times1=8$

**6.** 곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\left|\int_0^2 (3x^2-6x)\,dx\right| = \frac{1}{6}\cdot3\cdot2^3 = 4$

**7.** 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하자.

$$a_6=2(S_3-S_2) = 2a_3$$

⇝ $a_3 = a_6 - a_3 = 3d$

$a_1 = 2$

⇒ $3d-2=2d.\ d=2$

일 때, $S_{10}$의 값은? [3점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

$\therefore S_{10} = 10a_{5.5} = 10\times(2+4.5\times2) = 110$

**8.** 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+6 & (x<a) \\ 2x-a & (x \ge a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 $a$의 값의 합은? [3점] #240609

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

i) $-2a+6=a.\ a=2.$

ii) $-2a+6=-a.\ a=6$

$\therefore \Sigma a = \underline{8}$

**9.** 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이고 $a_{12}=\dfrac{1}{2}$일 때, $a_1+a_4$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

"주기=4"

| n | $\boxed{a_1=k}$ | $\frac{1}{k}$ | $\frac{8}{k}$ | $\frac{1}{8k}$ | $\boxed{k}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

$\Rightarrow a_{12}=a_4=\frac{1}{2} \rightsquigarrow k=4$

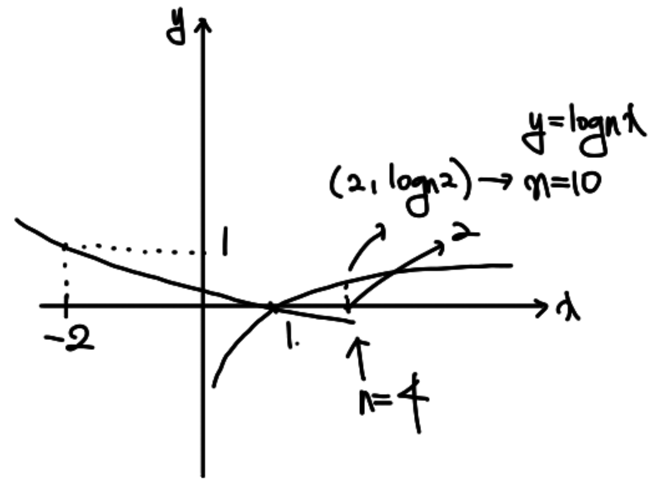
$\therefore a_1+a_4 = 4+\frac{1}{2} = \underline{\frac{9}{2}}$

**10.** $n \ge 2$인 자연수 $n$에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x,\quad y=-\log_n(x+3)+1$$

이 만나는 점의 $x$좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 $n$의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50




$\log_n 2 = -\log_n(2+3)+1$

$\Rightarrow \log_n 10 = 1.\ n=10$

$\therefore \Sigma n = 5+6+7+8+9$
$= \underline{35}$

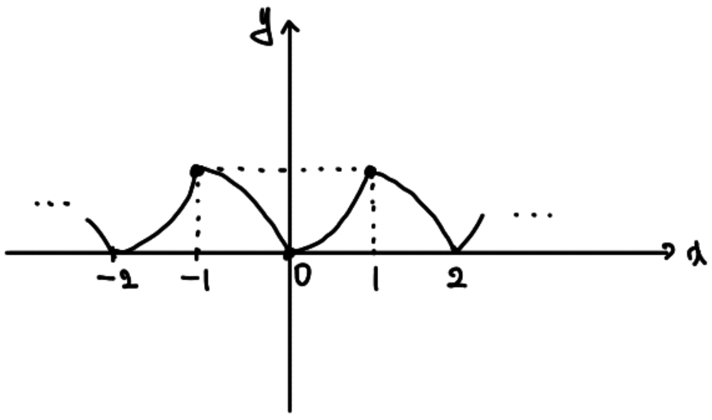
**11.** 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)dx$의 값은? [4점]

> (가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0\le x\le 1)\end{cases}$
>
> (나) 모든 실수 $x$에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

① $\frac{5}{2}$　② $\frac{17}{6}$　③ $\frac{19}{6}$　④ $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{23}{6}$



$\therefore \int_{-3}^{2} g(x)dx = 1+1+\frac{5}{6} = \frac{17}{6}$

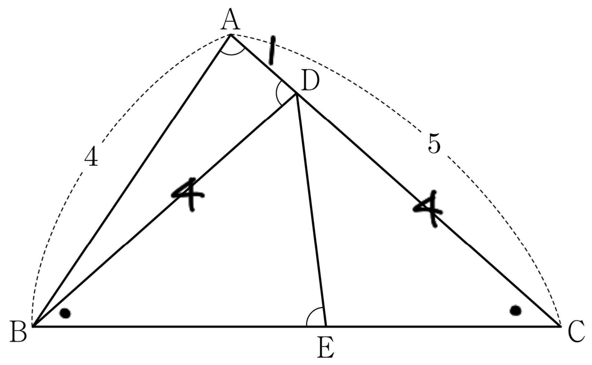
**12.** 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC = \angle BDA = \angle BED$$

일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]

$\overline{BC}=6.\ \sin\angle A=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

$\Rightarrow \sin\angle C=\frac{3\sqrt{7}}{8}\cdot\frac{4}{6}=\frac{\sqrt{7}}{4}$




① $\frac{7}{3}$　② $\frac{5}{2}$　③ $\frac{8}{3}$　④ $\frac{17}{6}$　⑤ $3$

$\therefore \overline{DE} = 4\cdot\frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3\sqrt{7}}{8}} = \frac{8}{3}$

(*참고: D에서 BC에 수선 내려 피타고라스도 OK)

**13.** 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0, 1]$에서

$$f(x)=\begin{cases} 3 & \cancel{(0<x<1)} \quad x \notin \mathbb{Z} \\ 1 & \cancel{(x=1)} \quad x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

이고, 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다.

$\sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3}$ 의 값은? [4점]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{k\times f(\sqrt{k})}{3} = \sum_{k=1}^{20} k - \frac{2}{3}\times \underbrace{(1+4+9+16)}_{=30}$$

$$= \frac{1}{2}\times 20\times 21 - 20 = 190$$

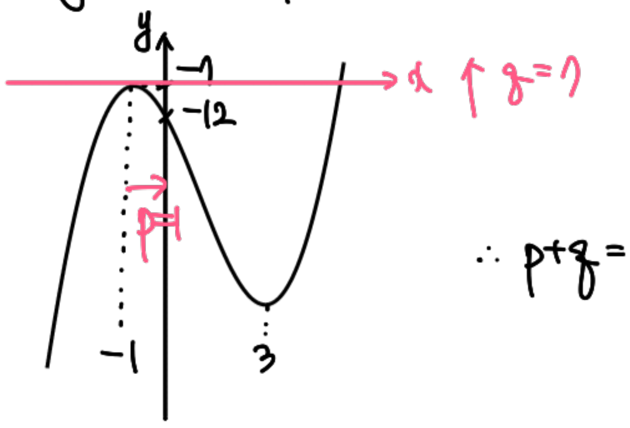
**14.** 두 양수 $p$, $q$와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

$3x^2-6x-9 = 3(x-3)(x+1)$

> (가) 모든 실수 $x$에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
> (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 $a$의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$g(x) = \mathrm{sgn}(x)\times|f(x-p)+q|$




$\therefore p+q = 8$

(※참고: $\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases} -1 & (x<0) \\ 0 & (x=0) \\ 1 & (x>0)\end{cases}$ )

15. $-1 \le t \le 1$인 실수 $t$에 대하여 $x$에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2} - t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2} - t\right) = 0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

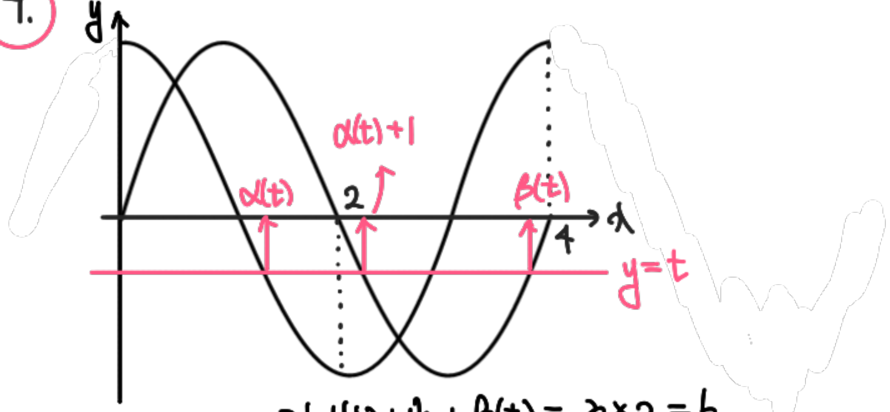
ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 $t$에 대하여 $\alpha(t) + \beta(t) = 5$이다.

ㄴ. $\{t \mid \beta(t) - \alpha(t) = \underbrace{\beta(0) - \alpha(0)}_{=3}\} = \left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$인 두 실수 $t_1$, $t_2$에 대하여 $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2 = \frac{1}{3}$이~~다~~.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

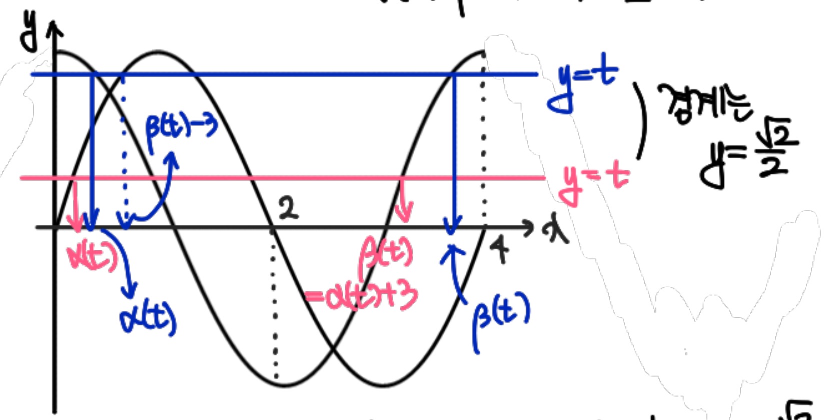
ㄱ.




$\Rightarrow \{\alpha(t)+1\} + \beta(t) = 3 \times 2 = 6$

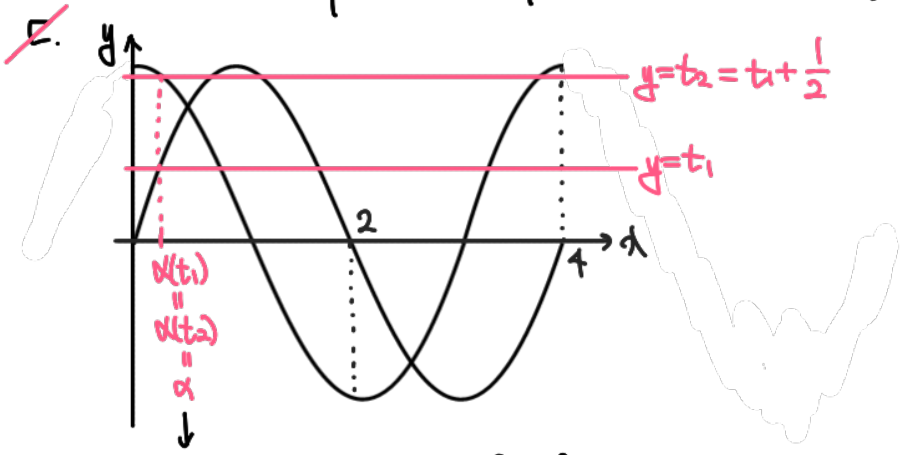
$\therefore \alpha(t) + \beta(t) = 5$ at $-1 < t < 0$

ㄴ.




$\therefore \beta(t) - \alpha(t) = \beta(0) - \alpha(0)$ at $0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

~~ㄷ.~~




$\begin{cases} \sin\alpha = t_1 \\ \cos\alpha = t_2 = t_1 + \frac{1}{2} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} t_1^2 + t_2^2 = 1 \\ t_2 - t_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$

$(t_1 - t_2)^2 = 1 - 2t_1t_2 = \frac{1}{4}$

$\therefore t_1 \times t_2 = \frac{3}{8}$

**단답형**

16. $\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24$의 값을 구하시오. [3점]

$\log_4 16 = 2$

17. 함수 $f(x) = x^3 - 3x + 12$가 $x = a$에서 극소일 때, $a + f(a)$의 값을 구하시오. (단, $a$는 상수이다.) [3점]

$\rightarrow 3x^2 - 3$ $\quad a = 1$

$1 + f(1) = 1 + (12 - 3 + 1) = 11$

**18.** 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2 = 36, \quad \cancel{a_7} = \frac{1}{3}\cancel{a_5}$$

$r^2$

일 때, $a_6$의 값을 구하시오. [3점]

$\therefore a_6 = a_2 r^4 = \boxed{4}$

**19.** 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k$$

$\nearrow s(t) = t^3 - 2t^2 + kt$

$s(1) = k - 1 = -3.\ k = -2$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 $0$이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 $-3$이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, $k$는 상수이다.) [3점]

$\Rightarrow s(t) = t^3 - 2t^2 - 2t$

$\therefore \Delta s_{t=1\sim3} = s(3) - s(1)$

$= 3 - (-3) = \boxed{6}$

**20.** 실수 $a$와 함수 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 3$에 대하여 함수

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45$

$= 3(x-3)(x-5)$

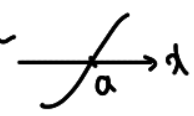
$$g(x) = \int_a^x \{f(x) - f(t)\} \times \{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 $a$의 값의 합을 구하시오. [4점]

"도함수 부변"

$g(x) = f(x) \cdot \int_a^x \{f(t)\}^4 dt - \int_a^x f(t)\{f(t)\}^4 dt$

$\Rightarrow g'(x) = f'(x) \cdot \int_a^x \{f(t)\}^4 dt$



$= 3(x-3)(x-5) \cdot \int_a^x \{f(t)\}^4 dt$

$\therefore a = 3$ or $a = 5 \rightsquigarrow \Sigma a = \boxed{8}$

**21.** 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 $n$의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) $x$에 대한 방정식 $(x^n - 64)f(x) = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
> (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

by IVT) $f(x)=0$은 두 실근 有.

$\Rightarrow x = \pm 2^{\frac{6}{n}}$ 이 $f(x)=0$의 두 실근.

$\Rightarrow f(x) = (x+2^{\frac{6}{n}})(x-2^{\frac{6}{n}}) = x^2 - 2^{\frac{12}{n}}$

$\Downarrow$

$2^{\frac{12}{n}}$ is 정수.

with $2|n$

$\Rightarrow n = \cancel{1}, 2, \cancel{3}, 4, 6, 12$

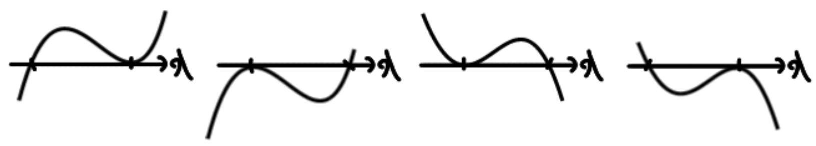
$\therefore \Sigma n = 24$

**22.** 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

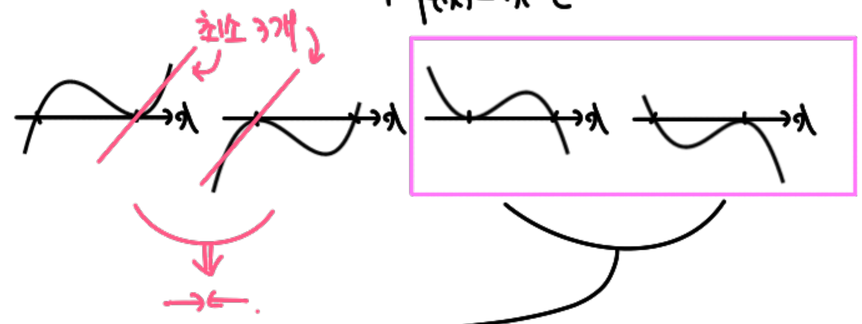
> (가) 방정식 $f(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> (나) 방정식 $f(x - f(x)) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

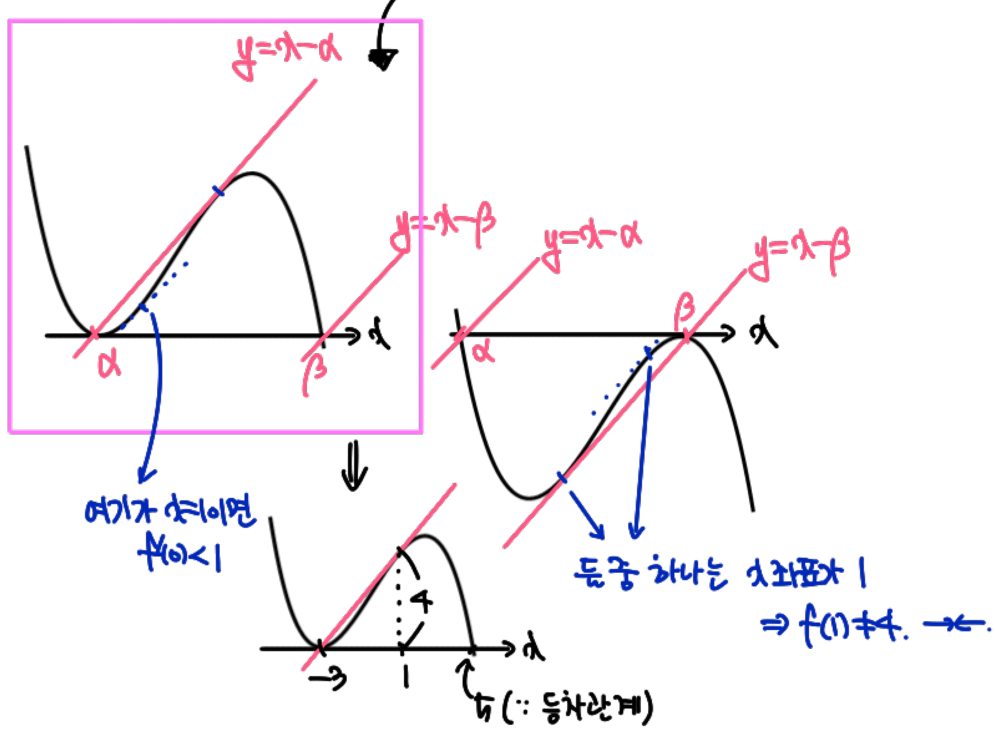
$f(1) = 4$, $f'(1) = 1$, $f'(0) > 1$일 때, $f(0) = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) $f(x)$로 가능한 개형 : $f(\alpha) = f(\beta) = 0$



(나) $f(x - f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(C) = 0 \rightsquigarrow \alpha, \beta \\ f(x) = x - C \end{cases}$




$\Rightarrow f(x) = -p(x+3)^2(x-5)$ with $f(1) = 4 \rightsquigarrow p = \frac{1}{16}$

$\therefore f(x) = -\frac{1}{16}(x+3)^2(x-5)$, $f(0) = \frac{45}{16} \Rightarrow p+q = 61$

> ＊ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

# 수학 영역(미적분)

## 5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{n+1}=2$

24. 매개변수 $t$로 나타내어진 곡선

$$x=e^t+\cos t,\quad y=\sin t$$

$x'(t)=e^t-\sin t,\ y'(t)=\cos t$

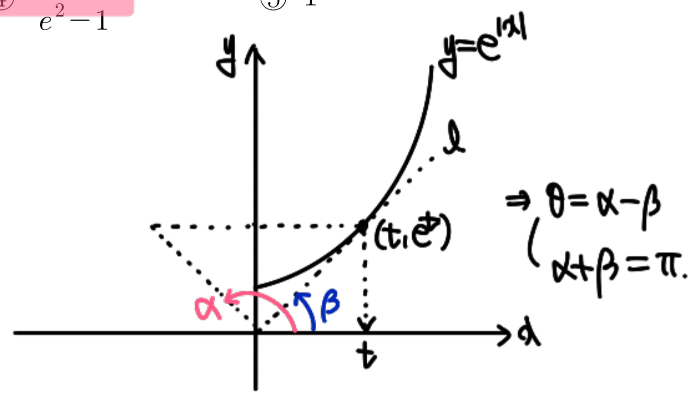
에서 $t=0$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{y'(0)}{x'(0)}=\frac{1}{1-0}=1$

**25.** 원점에서 곡선 $y=e^{|x|}$에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 $\theta$라 할 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{e}{e^2+1}$ ② $\frac{e}{e^2-1}$ ③ $\frac{2e}{e^2+1}$ ④ $\frac{2e}{e^2-1}$ ⑤ 1




$\Rightarrow \theta=\alpha-\beta$

$\alpha+\beta=\pi.$

$\Rightarrow$ $l$의 기울기 $=(t, e^t)$에서 순간변화율

$\Rightarrow \frac{e^t-0}{t-0}=e^t \Leftrightarrow t=1\ (\because e^t>0)$

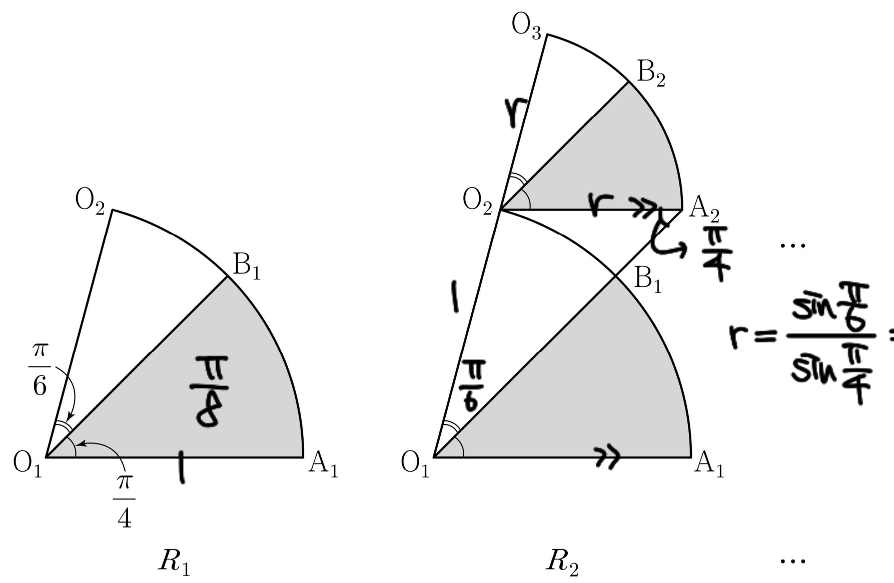
$\Rightarrow \tan\beta=\frac{e^t}{t}=e.\ \tan\alpha=\tan(\pi-\beta)=-e$

$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{-e-e}{1+e(-e)}=\frac{2e}{e^2-1}$

**26.** 그림과 같이 중심이 $O_1$, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_1A_1O_2$가 있다. 호 $A_1O_2$ 위에 점 $B_1$을 $\angle A_1O_1B_1=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_1A_1B_1$에 색칠하여 얻은 그림을 $R_1$이라 하자.

그림 $R_1$에서 점 $O_2$를 지나고 선분 $O_1A_1$에 평행한 직선이 직선 $O_1B_1$과 만나는 점을 $A_2$라 하자. 중심이 $O_2$이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_2A_2O_3$을 부채꼴 $O_1A_1B_1$과 겹치지 않도록 그린다. 호 $A_2O_3$ 위에 점 $B_2$를 $\angle A_2O_2B_2=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_2A_2B_2$에 색칠하여 얻은 그림을 $R_2$라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 $n$번째 얻은 그림 $R_n$에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 $S_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]




$r=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

① $\frac{3\pi}{16}$ ② $\frac{7\pi}{32}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{9\pi}{32}$ ⑤ $\frac{5\pi}{16}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\pi}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{4}$

**27.** 두 함수

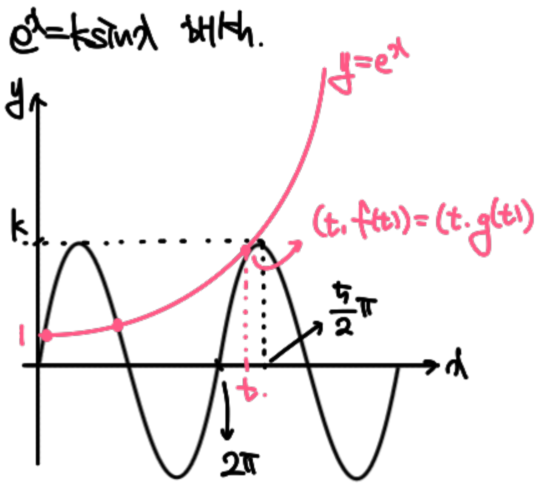
$$f(x)=e^x,\quad g(x)=k\sin x$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 때, 양수 $k$의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}}$ ② $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}}$ ③ $\sqrt{2}e^{2\pi}$ ④ $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$ ⑤ $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{2}}$

(별로…)

Sol 1) $e^x=k\sin x$ 해석.



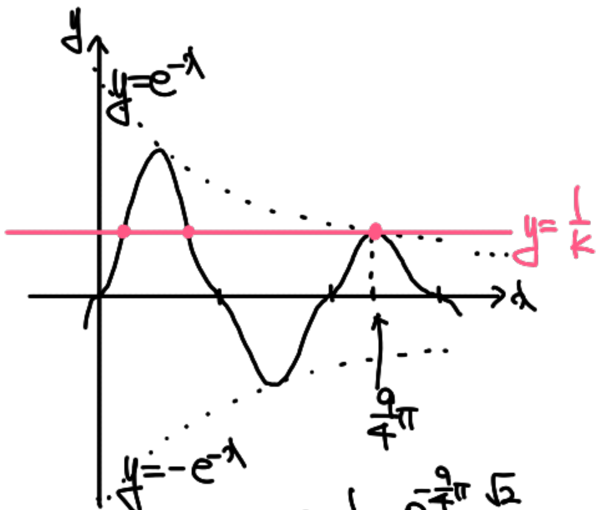

$$\begin{cases} e^t=k\sin t \\ e^t=k\cos t \end{cases} \rightsquigarrow \sin t=\cos t \text{ with } 2\pi<t<\tfrac{5}{2}\pi$$

$\Rightarrow t=\frac{9}{4}\pi$

$\Rightarrow e^{\frac{9}{4}\pi}=k\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},\quad k=\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}$

Sol 2) $\frac{1}{k}=e^{-x}\sin x$ 해석. ⊕ 0 ⊖ ⊕ ⋯

$e^{-x}(\cos x-\sin x) \rightsquigarrow x=\left(\frac{1}{4}+n\right)\pi\ (n\in\mathbb{Z})$ 에서 극값.

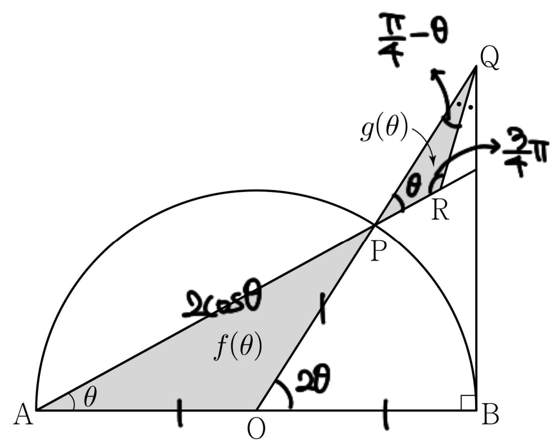



$\Rightarrow \frac{1}{k}=e^{-\frac{9}{4}\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore k=\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}$

**28.** 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, $\angle OQB$의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자. $\angle OAP=\theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]




① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

$f(\theta)=\frac{1}{2}\sin2\theta$

$\overline{OQ}=\sec2\theta \rightsquigarrow \overline{PQ}=\sec2\theta-1=\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\to 1-\cos2\theta$

이때 $\overline{PR}=\overline{PQ}\times\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\sin\frac{3}{4}\pi}=\sqrt{2}\cdot\overline{PQ}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\to\overline{PQ}$

$\Rightarrow g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{PR}\times\sin\theta\to\frac{1}{2}(1-\cos2\theta)^2\sin\theta$

$\therefore \lim\limits_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}=\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\sin2\theta}\times\left(\frac{1-\cos2\theta}{(2\theta)^2}\right)^2\times16$

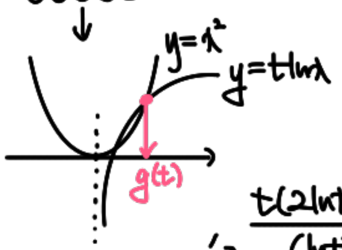
$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times16=2$

**단답형**

29. $t>2e$ 인 실수 $t$에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$이 $x=k$에서 극대일 때, 실수 $k$의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$인 실수 $\alpha$에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

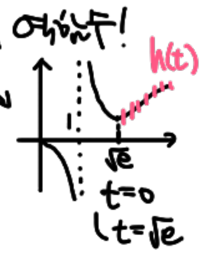
$\oplus \to \ominus$

$f'(x)=t\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}-2x=\frac{2}{x}(t\ln x-x^2)$




$\frac{t(2\ln t-1)}{(\ln t)^2}$

$\Rightarrow t\ln g(t)=\{g(t)\}^2 \rightsquigarrow g(t)$는 $\frac{t^2}{\ln t}$의 역함수!




$g(\alpha)=e^2 \rightsquigarrow \alpha\ln e^2=(e^2)^2 \to \alpha=\frac{1}{2}e^4$

$h(g(t))=t \rightsquigarrow h'(g(t))\times g'(t)=1.$

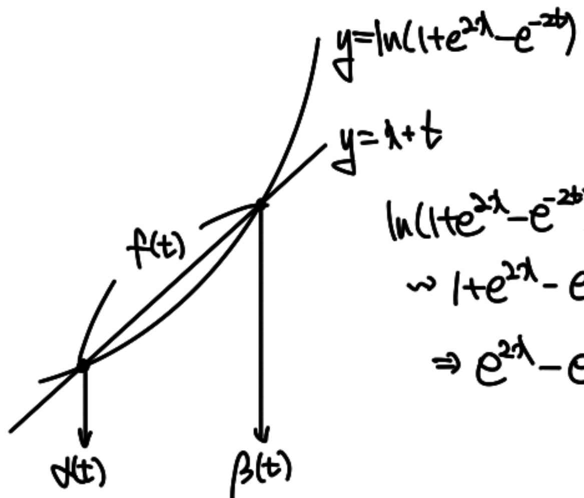
$\Rightarrow g'(\alpha)=\frac{1}{h'(e^2)}=\frac{(\ln e^2)^2}{e^2\cdot(4-1)}=\frac{4}{3}e^{-2}$

$\therefore \alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{1}{2}e^4\times\frac{16}{9}e^{-4}=\frac{8}{9},\ p+q=17$

30. $t>\dfrac{1}{2}\ln 2$인 실수 $t$에 대하여 곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2)=\dfrac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}-e^{-2t}} \rightsquigarrow$ 단조증가.

$\frac{4e^{2x}(1-e^{-2t})}{(\quad)^2} \rightsquigarrow$ 변곡점 X.




$\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})=x+t$

$\rightsquigarrow 1+e^{2x}-e^{-2t}=e^{x+t}$

$\Rightarrow e^{2x}-e^t\cdot e^x+(1-e^{-2t})=0$ 의 두 근이 $\alpha(t),\beta(t)$

$\Rightarrow f(t)=\sqrt{2}\{\beta(t)-\alpha(t)\}$

$\Rightarrow f'(t)=\sqrt{2}\{\beta'(t)-\alpha'(t)\}$

$\ln\left(\frac{3}{4}+e^{2x}\right)=x+\ln 2$

$\Rightarrow \frac{3}{4}+e^{2x}=2e^x=X$

$\Rightarrow 4X^2-8X+3=0$

$(2X-1)(2X-3)=0$

$\Rightarrow e^x=\frac{1}{2}$ or $\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \alpha(\ln 2)=\ln\frac{1}{2},\ \beta(\ln 2)=\ln\frac{3}{2}$

이때 $\begin{cases} e^{\alpha(t)}+e^{\beta(t)}=e^t \xrightarrow{\ '\ } \alpha'(t)e^{\alpha(t)}+\beta'(t)e^{\beta(t)}=e^t \\ e^{\alpha(t)+\beta(t)}=1-e^{-2t} \xrightarrow{\ '\ } \{\alpha'(t)+\beta'(t)\}e^{\alpha(t)+\beta(t)}=2e^{-2t} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha'(\ln 2)+3\beta'(\ln 2)=4 \\ \alpha'(\ln 2)+\beta'(\ln 2)=\frac{2}{3} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha'(\ln 2)=-1 \\ \beta'(\ln 2)=\frac{5}{3} \end{cases}$

$\therefore f'(\ln 2)=\sqrt{2}\left(\frac{5}{3}+1\right)=\frac{8}{3}\sqrt{2},\ p+q=11$

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.