1번 문항 (2022학년도 이화여자대학교 논술 기출)

상수 $p\,(1<p<2)$ 에 대하여 함수 $f(x)=x^3-px^2+px$ 가 있다. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1}=f(a_n)$$

을 만족시킨다. $0<a_1<1$ 일 때, 아래 물음에 답하시오.

(1) $0<x<\beta$ 에서 부등식 $f(x)>x$ 가 성립하고, $\beta<x<1$ 에서 부등식 $f(x)<x$ 가 성립하는 β 를
구하시오.

(2) 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $0<a_n<1$ 이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

(3) 문항 (1)에서 정해진 β 에 대하여 $a_1\neq\beta$ 일 때, 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $0<a_n<\beta$ 가 성립하거나 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $\beta<a_n<1$ 이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

(4) 문항 (1)에서 정해진 β 에 대하여 $a_1\neq\beta$ 일 때, 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $a_{n+1}>a_n$ 이 성립하거나 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $a_{n+1}<a_n$ 이 성립함을 보이시오.

2번 문항 (2017학년도 인하대학교 논술 기출

$a_n = 1 + a_1 a_2 \cdots a_{n-1}\,(n \geq 2)$, $a_1 = 1$

이때, $S_n = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}$ 이라 하자.

(1) 모든 자연수 n에 대하여, $S_n = 2 - \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$ 임을 보여라

(2) 모든 자연수 n에 대하여, $S_n < 2$ 임을 보여라

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값을 구하시오.

3번 문항 (2021학년도 서울대학교 심층 면접)

다항식 $g(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ 에 대하여 다음에 답하시오.

(1) x^5 을 $g(x)$ 로 나눈 나머지를 구하시오.

(2) 자연수 n 에 대하여 $f_n(x)=\left(x^3+x^2+3\right)^n$ 이라 하자. $f_n(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 나머지를

$r_n(x)=a_nx^3+b_nx^2+c_nx+d_n$ (단, a_n, b_n, c_n, d_n 는 정수)라 할 때, 모든 $n \geq 1$ 에 대하여

$a_n=b_n$, $c_n=0$ 임을 보이시오.

4번 문항 (2017학년도 인하대학교 논술 기출)

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 부등식을 만족시킨다.

$$a_{n+1} \geq \frac{na_n}{{a_n}^2 + n - 1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) 모든 자연수 n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\frac{n}{a_{n+1}} - \frac{n-1}{a_n} \leq a_n$$

(2) 모든 자연수 n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq \frac{n}{a_{n+1}}$$

(3) 수학적 귀납법을 이용하여, 모든 자연수 $n \geq 2$ 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$$

5번 문항 (2022학년도 서울시립대학교 논술 기출)

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의가

$$a_1 = 5\,,\ \ a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{2}{\sqrt{a_n}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

일 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$4 < a_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + 4\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

6번 문항 (2022학년도 가톨릭대학교 논술 기출)

제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제 (1), (2)에 답하시오.

(ㄱ) **[수학적 귀납법]** 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(ⅰ) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ㄴ) 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$은 다음과 같다.

모든 자연수 m에 대하여 $\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$이다.

(ㄷ) 모든 실수 c에 대하여 다음의 부등식을 만족시키는 자연수 n의 집합을 A라고 하자.

$$\int_0^1 x^n(1-x)^n\left(1+2\sqrt{3}\,cx+\frac{27}{10}c^2x^2\right)dx>0$$

(1) 제시문 (ㄴ)의 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

(2) 제시문 (ㄷ)의 집합 A를 구하고 그 과정을 논술하시오.

7번 문항 (2022학년도 부산대학교 논술 기출)

다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$(단, $g(x) \neq 0$)으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면 다음 식이 성립한다.

$$f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$$

이때 $R(x)$의 차수는 $g(x)$의 차수보다 낮다.

(나) 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지가 성립함을 보이면 된다.

(ⅰ) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

이와 같이 자연수 n에 대한 어떤 명제 $p(n)$이 성립함을 증명하는 방법을 수학적 귀납법이라고 한다.

(1) 다항식 $f(x)$를 x^2-x+1로 나눈 나머지는 $x-1$이고, $x+1$로 나눈 나머지는 -1일 때, $f(x)$를 x^3+1로 나눈 나머지를 구하시오.

(2) 다항식 $g(x) = x^4 + x - 1$ 대하여 다음 명제가 성립함을 수학적 귀납법을 사용하여 증명하시오. (단, $g^1(x) = g(x)$이고 $g^{n+1}(x) = g(g^n(x))$ (n은 자연수)이다.)

모든 자연수 n에 대하여 $g^n(x)$를 x^2-x+1로 나눈 나머지는 항상 일정하다.

8번 문항 (2023학년도 성균관대학교 논술 기출)

다음 <제시문 1>~<제시문 3>을 읽고 (1)~(3)을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문 1>

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(a) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.

(b) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.

<제시문 2>

삼각함수 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

<제시문 3>

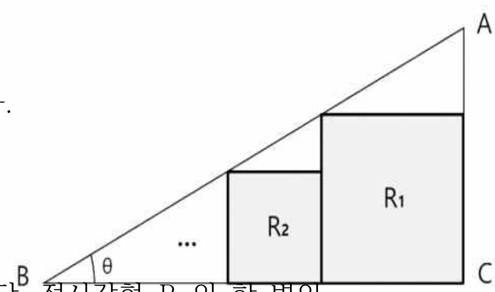
삼각형 ABC는 $\angle \mathrm{ACB} = 90^\circ$이고 $\angle \mathrm{ABC} = \theta$인 직각삼각형이다. 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 내부에 정사각형 $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3, \cdots$을 계속해서 만들어 나간다.

이때, 정사각형 R_n의 넓이를 s_n이라고 하자.

이와 같이 정의된 정사각형 $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \cdots, \mathrm{R}_n$ 중에서,

모든 홀수 번째 정사각형 넓이의 합을 P_n이라 하고

모든 짝수 번째 정사각형의 넓이의 합을 Q_n이라 하자. (단, 정사각형 R_1의 한 변의 길이는 1이다.)



(1) <제시문3>에서 정의된 수열 $\{s_n\}$과 $t=\tan\theta$에 대해, 일반항 s_n을 n과 t에 대한 식으로 표현하고 그 이유를 논하시오,

(2) <제시문3>에서 $\theta = \frac{\pi}{3}$일 때, $\frac{P_{2023}}{Q_{2023}} + \frac{Q_{2021}}{P_{2021}}$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

(3) <제시문3>에서 정의된 2023개의 정사각형 $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \cdots, \mathrm{R}_{2023}$ 중에서, 1012개의 홀수 번째 정사각형의 넓이의 평균값 $\frac{P_{2023}}{1012}$과 1011개의 짝수 번째 정사각형의 넓이의 평균값 $\frac{Q_{2023}}{1011}$의 대소관계를 <제시문1>의 수학적 귀납법과 (2)를 이용하여 판단하고, 그 이유를 논하시오.

9번 문항 (2023학년도 이화여자대학교 논술 기출)

양의 실수 a에 대하여 함수 $f(a)$는 $y=x^2$ 위의 점 (a, a^2)에서 접선과 직선 $y=2$의 교점의 x좌표로 주어진다. 모든 항이 양수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=f(a_n), \quad b_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)$$

을 만족시킬 때, 아래 물음에 답하시오.

(1) a_1이 양의 실수일 때, $a_2 \geq \sqrt{2}$이 성립함을 보이시오.

(2) $a_1 \geq \sqrt{2}$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \geq \sqrt{2}$이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

(3) $a_1 \geq \sqrt{2}$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} \leq a_n$이 성립함을 보이시오.

(4) 모든 자연수 n에 대하여 $b_{n+1} \leq b_n$이 성립함을 보이시오.

10번 문항 (2023학년도 인하대학교 메디컬 논술 기출)

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

[수학적 귀납법] 자연수 $n(\geq 9)$에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 $n(n \geq 9)$에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(1) $n = 9$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(2) $n = k$ $(k \geq 9)$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면, $n = k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

(※) 2 이상인 서로 다른 자연수 n $(n \geq 1)$개로 이루어진 집합 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$에 대하여

$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1$이면 A를 "조화로운 집합"이라 부르자.

예를 들어, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$이므로 $\{2, 3, 6\}$은 조화로운 집합이다.

(1) 조화로운 집합 A에 대하여 $n(A) \geq 3$임을 증명하시오.

(2)

(a) 집합 A가 조화로운 집합이면, $x \in A$인 모든 x에 대하여 $2x \in B$인 조화로운 집합 B가 존재함을 증명하시오.

(b) $\{3, 4, 5, 6, 20\}$이 2를 포함하지 않는 조화로운 집합임을 이용하여,
$n(A) = 9$이고 $2, 3 \notin A$ 인 조화로운 집합을 하나 구하시오.

(3)

(a) 2 이상인 자연수 m에 대하여 $\frac{1}{m} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$이 되는 서로 다른 자연수 p, q의 순서쌍 (p, q)를 하나 구하시오.

(b) 9 이상인 임의의 자연수 n에 대하여 원소의 개수가 n이고 2, 3을 포함하지 않는 조화로운 집합이
존재함을 증명하시오.

11번 문항 (2023학년도 KAIST 면접 기출)

실수의 순서쌍 (a_0, b_0) 을 생각하자. 방정식 $x^2 + a_0 x + b_0 = 0$ 의 실수해가 존재하지 않으면 순서쌍 (a_0, b_0) 의 친화도를 0 으로 정의하고, 방정식 $x^2 + a_0 x + b_0 = 0$ 이 두 실수해 a_1, b_1 $(a_1 \geq b_1)$을 가지면(중근은 두 개로 센다.) 새로운 방정식 $x^2 + a_1 x + b_1 = 0$ 을 만들어 이 방정식의 실수해가 없으면 순서쌍 (a_0, b_0) 의 친화도를 1 로 정의하고, 실수해가 존재하면 두 실수해를 a_2, b_2 $(a_2 \geq b_2)$로 두자. 이런 과정을 반복해서 방정식 $x^2 + a_k x + b_k = 0$ 이 실수해를 갖지 않는 최소의 k 를 순서쌍 (a_0, b_0) 의 친화도로 정의하자. 만약 이런 과정이 끝나지 않고 계속 반복된다면 순서쌍 (a_0, b_0) 의 친화도는 정의되지 않는다고 하자.

(1) 순서쌍 $(-6, 9)$ 의 친화도는 정의되는가? 정의된다면 친화도는 얼마인가?

(2) 순서쌍 $(-3, 2)$ 의 친화도는 정의되는가? 정의된다면 친화도는 얼마인가?

(3) 친화도가 정의되는 순서쌍 중 친화도의 최댓값은 얼마인가?

12번 문항 (2021학년도 가톨릭대 논술 기출)

제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(1), (2)에 답하시오.

(ㄱ) 수열 $\{a_n\}$의 각 항은 양의 정수이고 모든 자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$a_{n+2} = \begin{cases} 3(a_n + a_{n+1}) + 1 & (a_n + a_{n+1}\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2} & (a_n + a_{n+1}\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 수열 $\{a_n\}$과 자연수 k에 대하여 명제 p는 다음과 같다.

p : a_k와 a_{k+2}가 모두 홀수이면
$n \le k+2$인 모든 자연수 n에 대하여 a_n은 홀수이다.

(ㄷ) 제시문 (ㄱ)의 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3 = 19$이고 $a_6 = 22$일 때, 가능한 모든 a_1을 원소로 갖는 집합을 A라고 하자.

(1) 제시문 (ㄴ)의 명제 p의 참, 거짓을 판별하고 그 근거를 논술하시오.

(2) 제시문 (ㄷ)의 집합 A를 구하고 그 근거를 논술하시오.

13번 문항 (2021학년도 이화여대 논술 기출)

모든 항이 양수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 $a_1 = 2$, $b_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$(a_{n+1})^2 = a_n + 1,\ b_{n+1} = 2 - \frac{1}{b_n + 1}$$

을 만족시킨다. 아래 물음에 답하시오.

(1) 부등식 $x^2 \le x + 1$의 해가 $\alpha \le x \le \beta$일 때 α, β를 구하고, 닫힌구간 $[0, \beta]$에서 함수 $f(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$의 최댓값이 2임을 보이시오.

(2) β가 문항 (1)에서 정해질 때, 모든 자연수 n에 대하여 두 부등식 $a_n \ge \beta$와 $b_n \le \beta$가 각각 성립함을
수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

(3) 모든 자연수 n에 대하여 두 부등식 $a_n \ge a_{n+1}$과 $b_n \le b_{n+1}$이 각각 성립함을 보이시오.

14번 문항 (2021학년도 인하대 논술 기출)

(가) 다음과 같이 어떤 명제가 참임을 증명하는 방법을 '수학적 귀납법'이라 한다. 모든 $k=0,1,2,\cdots,N$에 대하여 명제 $p(k)$가 성립함을 증명할 때, 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) 명제 $p(0)$이 성립한다.

(ii) $k<N$에 대하여 명제 $p(k-1)$이 성립한다고 가정하면, 명제 $p(k)$가 성립한다.

(나) 수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 과 자연수 m에 대하여 $a_{i+1}, a_{i+2}, \cdots, a_{i+m}$과 같이 연속된 m개의 항을 'm-토막'이라고 부르고, 이 m-토막의 항의 합을 기호

$$S(i,\ i+m]=a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{i+m}$$

으로 나타내자. 이때, a_{i+j}는 이 m-토막의 j번째 항이다.

(※) 수열 $\{a_n\}$의 첫 m^2+m개의 항 $a_1, a_2, \cdots, a_{m^2+m-1}, a_{m^2+m}$이 다음 조건을 만족한다.(단, $m>1$)

(i) 모든 $1 \le i \le m^2+m$에 대하여 $a_i=0$ 또는 1이다.

(ii) 모든 $0 \le i \le m^2-m$에 대하여

$a_{i+1}+\cdots+a_{i+m}<a_{i+m+1}+\cdots+a_{i+2m}$, 즉 $S(i,\ i+m]<S(i+m,\ i+2m]$이다.

(1) $0 \le k \le m$일 때, $S(km,\ (k+1)m]=k$임을 보이시오.

(2) 이제 수학적 귀납법을 이용하여 다음 명제를 증명하고자 한다.

[명제] $a_1, a_2, \cdots, a_{m^2+m-1}, a_{m^2+m}$이 다음과 같은 $m+1$개의 m-토막으로 이루어져 있다.

$$\underbrace{0,\cdots,0}_{m\text{개}},\underbrace{0,\cdots,0,1}_{m\text{개}},\underbrace{0,\cdots,0,1,1}_{m\text{개}},\cdots,\underbrace{0,1,\cdots,1,1}_{m\text{개}},\underbrace{1,\cdots,1,1}_{m\text{개}},\cdots\cdots(*)$$

(*)에서와 같이 수열 $a_1, a_2, \cdots, a_{m^2+m-1}, a_{m^2+m}$을 m-토막을 $m+1$개의 m-토막으로 나타내었을 때, 왼쪽부터 오른쪽까지 차례로 0번째, 1번째, $\cdots$, m번째 m-토막이라 부르자. 위 명제를 증명하려면 다음 명제 $p(k)$가 $0 \le k \le m$인 모든 k에 대하여 성립함을 보이면 된다.

[명제$p(k)$] k번째 $(0 \le k \le m)$ m-토막 $a_{km+1}, a_{km+2}, \cdots, a_{(k+1)m}$이 다음과 같다.

$$\underbrace{0,\cdots,0}_{m-k},\underbrace{1,1,\cdots,1}_{k}$$

이것이 $k=0$일 때 성립함을 보인 후, $k-1$번째 m-토막에 대하여 성립한다고 가정하고, k번째 m-토막에 대해 성립함을 보이면 된다.

(a) 명제 $p(k-1)$이 성립한다고 가정하고, k번째 m-토막에서 처음 1이 나오는 것이 l번째 항이라

가정하자. $j=k, k+1, \cdots, m$에 대하여 $S(l+(j-1)m,\ l+jm]$의 값을 구하시오.

(b) 명제 $p(k)$가 모든 $k=0,1,\cdots,m$에 대하여 성립함을 보이시오.

(단, 이 명제가 주어진 조건에 대한 충분조건임을 보일 필요는 없다.)

15번 문항 (2021학년도 인하대 논술 기출)

(가) (수학적 귀납법) 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(1) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.

(2) $n=k(k \geq 1)$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면, $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

(*) 자연수 m에 대하여 ($4m+1$개의 원소로 이루어진) 집합

$$X=\{-2m, -2m+1, \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, 2m-1, 2m\}$$

의 어떤 부분집합 A가 다음 조건을 만족한다.

A의 어떠한 원소 a, b, c에 대하여도 $a+b+c \neq 0$이다. 단, a, b, c가 서로 다를 필요는 없다.

예를 들어, 0은 A의 원소가 될 수 없다. 왜냐하면 $0+0+0=0$이기 때문이다.

(1)

(a) $-2m \in A$인 경우, $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$에 대하여 i와 $2m-i$중 하나는 A의 원소가 될 수 없음을 보이시오.

(b) $-2m \in A$이고 $2m \in A$인 경우, $n(A) \leq 2m$임을 보이시오.

(2) 수학적 귀납법을 이용하여 $n(A) \leq 2m$임을 증명하시오.

(3) 각 자연수 m에 대하여, 위의 조건을 만족하고 $n(A)=2m$이고 $-2m \notin A$, $2m \notin A$인 집합 A를 하나 찾으시오.

16번 문항 (2021학년도 인하대 논술 기출)

<제시문 1>

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(a) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.

(b) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

<제시문 2>

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A와 사건 B가 일어나는 경우의 수를 각각 m, n이라고 하면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

<제시문 3>

두 정수 a와 b에 대하여 이차방정식 $x^2+ax-b=0$의 두 근을 α, β라고 할 때(단, $\alpha \leq \beta$), 모든 자연수 n에 대하여

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k}\beta^k = \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n$$

으로 정의하자.

[1] <제시문 3>에서 정의된 수열 $\{f_n\}$에 대하여

$$f_{n+2} = -af_{n+1} + bf_n$$

이 모든 자연수 n에대하여 성립함을 보이시오.

[2] <제시문 1>의 수학적 귀납법을 이용하여 <제시문 3>에서 정의된 수열 $\{f_n\}$의 모든 항이 정수라는 사실을 보이시오.

[3] 동전을 5번 던져 앞면이 a번 나오고 뒷면이 b번 나왔다고 할 때, 절댓값 $|f_5|$의 값이 1000보다 클 경우의 수를 구하고, 그 이유를 논하시오.

17번 문항 (2022학년도 경북대 모의논술)

(가) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$와 $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

(나) 좌표평면 위의 점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

(다) 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

(라) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x) \geq 0$일 때, 정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\begin{cases} a_n+2 & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

으로 정의될 때, 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}_n(a_{2n-1}, 0)$, $\mathrm{B}_n(0, a_{2n})$에 대하여 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$의 넓이를 $S(n)$이라고 하자. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=b_n x^n$과 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 교점을 P_n이라 하자. 곡선 $y=b_n x^n$과 x축 및 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{P}_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{1}{n+1}S(n)$일 때, 다음 물음에 답하시오. 단, $b_n>0$이다.

[1] 모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$이 성립함을 (다)를 이용하여 증명하시오.

[2] $b_n = c_n \dfrac{a_{2n}}{(a_{2n-1})^n}$ 을 만족시키는 c_n 을 구하시오.

[3] 선분 $\mathrm{A_8B_8}$ 위의 한 점 Q에 대하여 선분 $\mathrm{QP_9}$가 사각형 $\mathrm{A_8A_9B_9B_8}$의 넓이를 이등분할 때, 점 Q의 x좌표를 구하시오.

18번 문항 (2017학년도 서울과학기술대학교 논술기출)

아래의 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

수학적 귀납법

자연수 n에 관한 명제 $p(n)$이 모든 자연수에 대하여 성립한다는 것을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

1. $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.
2. $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면, $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

자연수 n에 대하여, x에 관한 함수 $f_n(x)$는 다음과 같이 정의된다.

$$f_n(x)=f_{n-1}(x)\times x^{a_n},\ f_0(x)=1$$

[1] $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$를 구하시오.

2] $a_n=n+1$일 때, $f_{30}(x)$를 x에 관한 식으로 나타내시오.

[3] $a_n=\dfrac{1}{n}$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $f_n(x)\geq x^{\frac{2n}{n+1}}$ (단, $x>1$)임을 증명하시오.

19번 문항 (2022학년도 광운대학교 논술기출)

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$을 생각하자.

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + (n^2 + 2n + 2) \times (n+1)!\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

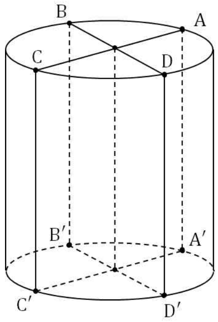
다음 물음에 답하시오. (단, $n! = n(n-1)(n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$이다.)

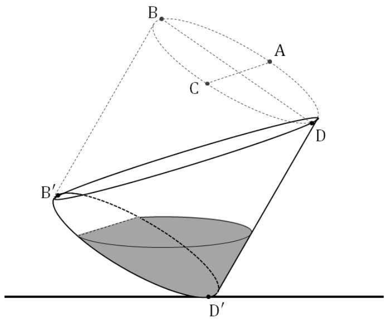
(1) a와 b는 실수이고 n에 관한 이차식 $g(n) = an^2 + bn$이 있어서 모든 자연수 n에서 $a_n = g(n) \times n!$이 성립한다고 할 때, 이차식 $g(n)$을 구하시오.

(2) (1)에서 얻은 $g(n)$에 대하여 모든 자연수 n에서 $a_n = g(n) \times n!$임을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

20번 문항 (2015학년도 경희대학교 논술기출)

아래 그림에서 점 A, B, C, D는 원기둥의 밑면의 둘레를 4등분하고, 점 A′, B′, C′, D′은 각각 점 A, B, C, D의 맞은편 원기둥 밑면으로의 정사영이다. 사각형 ACC′A′을 포함하는 평면이 평평한 지면과 이루는 각이 θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$가 되도록 원기둥을 점 D′이 지면에 접하게 기울인다. 기울어진 원기둥을 점 A, C를 지나는 직선과 평행이면서 점 D, B′을 포함하는 평면으로 잘라서 아래 오른쪽 그림과 같은 용기를 만들어 물을 채우려한다. 첫 번째 단계에서 비어있는 용기에 1만큼의 물을 채운다. 그리고 다음 단계에서 현재 용기에 담겨있는 물의 양의 반의 제곱을 덜어내고 다시 1만큼의 물을 용기에 추가한다. 이와 같은 과정을 반복하여 n번째 단계에서 용기에 담겨있는 물의 양을 V_n이라 하자.





[1] 모든 단계에서 $0<V_n<2$임을 수학적 귀납법을 이용하여 논술하시오.

[2] n이 커짐에 따라 물의 양 V_n이 증가함을 논술하시오.

21번 문항 (2015학년도 이화여자대학교 논술기출)

※ 다음을 읽고 논제에 답하시오.

모든 항이 0보다 크거나 같은 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 < 1$이고 다음 점화식을 만족할 때 아래 물음에 답하시오. [30점]

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}^2 = \dfrac{1+a_n}{2}$

[1]모든 자연수 n에 대하여 $a_n < 1$임을 보이시오.

[2] 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < a_{n+1}$임을 보이시오.

[3] $a_1 = \cos\theta\,(0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2})$를 만족할 때 일반항 a_n을 θ로 나타내시오.

[4] 수열 $\{a_n\}$이 수렴함을 보이고, 그 극한값을 구하시오.

22번 문항 (2013학년도 한국외국어대학교 모의논술)

모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오. (단, $0 \leq a \leq b$)

$$\left(\frac{a+2b}{3}\right)^n \leq \frac{a^n+2b^n}{3}$$

1번 문항 해설

(1)
함수 $g(x)=f(x)-x$라고 하자.
$g(x)=x^3-px^2+(p-1)x=x(x-1)(x-p-1)$이므로
$g(x)=0$의 근은 $x=0,1,p-1$이고 $1<p<2$이므로 $0<p-1<1$이다.
최고차항의 계수가 양수이고 삼차방정식이 서로 다른 세 근을 갖는 삼차함수의 그래프의 성질에 의해 $0<x<p-1$에서 $g(x)>0$이고, $p-1<x<1$에서 $g(x)<0$이다.
따라서 $0<x<p-1$에서 $f(x)>x$이고 $p-1<x<1$에서 $f(x)<x$이다. 따라서 구하는 β는 $p-1$이다.

(2)
$n=1$일 때, $0<a_1<1$이다. $n=k$일 때, $0<a_k<1$을 가정하자. $a_{k+1}=f(a_k)$이므로 $0<f(a_k)<1$을 보이면 $0<a_{k+1}<1$이 성립한다.

$f'(x)=3x^2-2px+p$이다. 이차방정식 $3x^2-2px+p=0$의 판별식을 이용하면 $D/4=p^2-3p=p(p-3)$이 $1<p<2$에서 $D/4<0$이므로 $f'(x)=3x^2-2px+p>0$이다.
따라서 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\infty)$에서 증가한다.

$f(0)=0, f(1)=1$이므로 $0<x<1$일 때, $0<f(x)<1$이다. $0<a_k<1$이므로 $0<f(a_k)=a_{k+1}<1$이다.
따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $0<a_n<1$이 성립한다.

(3)
문항 (1)의 결과로부터 $\beta=p-1$이고 $0<a_1<\beta$인 경우와 $\beta<a_1<1$인 경우로 나누어 수열의 부등식이 성립함을 보인다.

(i) $0<a_1<\beta$인 경우
$n=1$일 때, $0<a_1<\beta$가 성립한다.
$n=k$일 때, $0<a_1<\beta$를 가정하자. 문항 (2)의 풀이로부터 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\infty)$에서 증가하므로 $f(0)<f(a_k)<f(\beta)$이다. $f(0)=0, f(\beta)=\beta$이므로 $0<a_{k+1}<\beta$이다.
따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $0<a_n<\beta$이다.

(ii) $\beta<a_1<1$인 경우
$n=1$일 때, $\beta<a_1<1$이 성립한다.
$n=k$일 때, $\beta<a_1<1$을 가정하자. 문항 (2)의 풀이로부터 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\infty)$에서 증가하므로 $f(\beta)<f(a_k)<f(1)$이다. $f(\beta)=\beta, f(1)=1$이므로 $\beta<a_{k+1}<1$이다.

따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $\beta < a_n < 1$이다.

(4)

문항 (3)과 마찬가지로 $0 < a_1 < \beta$인 경우와 $\beta < a_1 < 1$인 경우로 나누어 수열의 부등식이 성립함을 보인다.

(i) $0 < a_1 < \beta$인 경우

문항 (3)의 결과로부터 모든 자연수 n에 대하여 $0 < a_n < \beta$이다. 문항 (1)의 결과로부터 $0 < x < \beta$이면 $f(x) > x$이므로 $f(a_n) > a_n$이다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = f(a_n) > a_n$이 성립한다.

(ii) $\beta < a_1 < 1$인 경우

문항 (3)의 결과로부터 모든 자연수 n에 대하여 $\beta < a_n < 1$이다. 문항 (1)의 결과로부터 $\beta < x < 1$이면 $f(x) < x$이므로 $f(a_n) < a_n$이다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = f(a_n) < a_n$이 성립한다.

2번 문항 해설

(1) $n=1$일 때, $S_1=\frac{1}{a_1}=1$ 인데,

$2-\frac{1}{a_2-1}=2-\frac{1}{a_{n+1}-1}=2-\frac{1}{a_1}=1$이므로

$S_1=2-\frac{1}{a_2-1}$ 이 성립한다.

$n=k$일 때, $S_k=2-\frac{1}{a_{k+1}-1}$ 가 성립한다 가정하자. 양변에 $\frac{1}{a_{k+1}}$를 더하면

$$
\begin{aligned}
S_{k+1}&=2-\frac{1}{a_{k+1}-1}+\frac{1}{a_{k+1}}\\
&=2-\frac{1}{(a_{k+1}-1)a_{k+1}}\\
&=2-\frac{1}{(a_1a_2\ \ldots\ a_k)a_{k+1}}\\
&=2-\frac{1}{a_{k+2}-1}
\end{aligned}
$$

으로 $n=k+1$일 때도 $S_n=2-\frac{1}{a_{n+1}-1}$ 가 성립한다.

따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $S_n=2-\frac{1}{a_{n+1}-1}$ 가 성립한다.

(2) 논제 (1)에서 구한 $S_n=2-\frac{1}{a_{n+1}-1}$ 를 이용하자.

주어진 모든 자연수 n에 대하여 $S_n<2$를 증명하기 위해서는

2 이상의 자연수 n에 대하여 $a_n>1$을 증명하면 된다.

$a_n>1$ 을 수학적 귀납법으로 증명하자.

$n=2$일 때, $a_2=2$이므로 $a_n>1$가 성립한다.

$n=k$일 때, $a_k>1$ 가 성립한다고 가정하면

$a_k=1+a_1a_2\cdots a_{k-1}$ 이므로 $a_1a_2\cdots a_{k-1}>0$ 를 얻는다.

양변에 a_k를 곱하면 $a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k>0$ 이고

양변에 1을 더하면 $a_{k+1}>1$ 을 얻는다.

그러므로 $n=k+1$일 때 $a_n>1$가 성립한다.

따라서 수학적 귀납법에 의해 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>1$가 성립하고,

이에 따라 모든 자연수 n에 대하여 $S_n<2$가 성립한다.

(3). $a_{n+1}-a_n=(1+a_1a_2\cdots a_n)-(1+a_1a_2\cdots a_{n-1})$

$=a_1a_2\cdots a_{n-1}(a_n-1)>0$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 증가수열이다.

이때 수열 $\{a_n\}$은 증가수열이므로, $n>2$인 자연수 n에 대해 $a_2<a_n$을 만족한다.

$S_n=2-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=2-\dfrac{1}{a_1a_2\cdots a_n}>2-\dfrac{1}{a_1a_2^{n-1}}=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}$이다.

또한 (2)에 의해 $S_n<2$이므로, $2-\dfrac{1}{2^{n-1}}<S_n<2$를 만족한다.

부등식에 극한을 취하면 $\lim_{n\to\infty}(2-\dfrac{1}{2^{n-1}})=2$, $\lim_{n\to\infty}2=2$이므로 샌드위치 정리에 의해 $\lim_{n\to\infty}S_n=2$이다.

3번 문항 해설

(1) $x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$
$\therefore x^5=(x-1)g(x)+1$

위와 같이 인수분해하면 x^5을 $g(x)$로 나눈 나머지는 1이라는 결론을 얻을 수 있다

(2)

먼저, $n=1$일 때

$x^3+x^2+3=(x^4+x^3+x+1)\times 0+x^3+x^2+3$
$\Rightarrow r_1(x)=a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1=x^3+x^2+3$
$\therefore a_1=b_1=1, c_1=0$

다음 $n=k$일 때 성립한다고 가정하고 $n=k+1$일 때 성립함을 증명하여 보겠습니다.

$f_k(x)=(x^3+x^2+3)^k=g(x)Q_k(x)+r_k(x)$

$r_k(x)=a_kx^3+b_kx^2+c_kx+d_k$ (정수계수)

$\Rightarrow a_k=b_k, c_k=0$이 성립한다고 가정

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= (x^3+x^2+3)^{k+1} \\ &= (x^3+x^2+3)^k(x^3+x^2+3) \\ &= (g(x)Q_k(x)+r_k(x))(x^3+x^2+3) \\ &= g(x)(x^3+x^2+3)Q_k(x)+r_k(x)(x^3+x^2+3) \end{aligned}$$

$r_k(x)(x^3+x^2+3)$

$=a_kx^3+b_kx^2+c_kx+d_k(x^3+x^2+3)$

$=a_kx^3+a_kx^2+d_k(x^3+x^2+3)$

$=a_kx^6+2a_kx^5+a_kx^4+(3a_k+d_k)x^3+(3a_k+d_k)x^2+3d_k$

$=a_kx((x-1)g(x)+1)+2a_k((x-1)g(x)+1)+a_k(1\times g(x)-(x^3+x^2+x+1))$
$\quad +(3a_k+d_k)x^3+(3a_k+d_k)x^2+3d_k$

$=g(x)(a_kx(x-1)+2a_k(x-1)+a_k)+a_kx+2a_k-a_k(x^3+x^2+x+1)+(3a_k+d_k)x^3+(3a_k+d_k)x^2+3d_k$

$g(x)Q(x)+(2a_k+d_k)x^3+(2a_k+d_k)x^2+a_k+3d_k$
$\therefore a_{k+1}=2a_k+d_k,\ b_{k+1}=2a_k+d_k,\ c_{k+1}=0,\ d_{k+1}=a_k+3d_k$

따라서 $n=k+1$일 때도 $a_{k+1}=b_{k+1}$이고, $c_{k+1}=0$이 됩니다.

4번 문항 해설

(1) 주어진 부등식으로부터,

$$\frac{1}{a_{n+1}} \leq \frac{a_n^2+n-1}{na_n} \Rightarrow \frac{n}{a_{n+1}} \leq a_n + \frac{n-1}{a_n}$$
$$\Rightarrow \frac{n}{a_{n+1}} - \frac{n-1}{a_n} \leq a_n$$

(2) (1)에 의해

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \geq \left(\frac{1}{a_2}-\frac{0}{a_1}\right)+\left(\frac{2}{a_3}-\frac{1}{a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{a_{n+1}}-\frac{n-1}{a_n}\right)=\frac{n}{a_{n+1}}$$

(3)

1) $n=2$일 때

$a_1+a_2 \geq a_1+\frac{1}{a_1}$((1)에 의해) ≥ 2 (제시문 (가)에 의해

2) $a+\cdots+a_k \geq k$라 가정하자

(i)$a_{k+1} \geq 1$이면 자명하다. $a+\cdots+a_{k+1} \geq k+1$

(ii) $a_{k+1} < 1$이면,

$$\begin{aligned} a_1+\cdots+a_k+a_{k+1} &\geq \frac{k}{a_{k+1}}+a_{k+1} \text{ (1-2에 의해)} \\ &= \frac{k-1}{a_{k+1}}+\left(\frac{1}{a_{k+1}}+a_{k+1}\right) \\ &> k-1+2=k+1 \text{(제시문 (가)에 의해)} \end{aligned}$$

5번 문항 해설

$a_{n+1}-4=\frac{3}{4}(a_n-4)+\frac{2}{\sqrt{a_n}}-1$ 이다. 양수 a 에 대하여

$1-\frac{2}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}}=\frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+2)}=\frac{a-4}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+2)}$

이므로, $a>4$ 일 때 $0<1-\frac{2}{\sqrt{a}}<\frac{a-4}{8}$ 이다.

따라서 $a>4$ 일 때

$$(a-4)\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{4}(a-4)-\frac{1}{8}(a-4)<\frac{3}{4}(a-4)-\left(1-\frac{2}{\sqrt{a}}\right)<\frac{3}{4}(a-4) \text{ 이므로 } ,$$

$$0<\frac{3}{4}(a-4)+\frac{2}{\sqrt{a}}-1<\frac{3}{4}(a-4) \quad \cdots\cdots \text{ ① 이다.}$$

모든 자연수 n 에 대하여 $0<a_n-4\le\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 이 성립함을 보이면 된다.

이를 수학적 귀납법을 이용해서 보이자.

$n=1$ 일 때, $0<5-4\le\left(\frac{3}{4}\right)^{0}=1$ 이므로 성립한다.

$n=k$ 일 때, 성립한다고 가정하면

$0<a_k-4\le\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$ $\cdots\cdots$ ② 이므로 $a_k>4$ 이다.

①, ②에 의해 $0<a_{k+1}-4=\frac{3}{4}(a_k-4)+\frac{2}{\sqrt{a_k}}-1<\frac{3}{4}(a_k-4)\le\left(\frac{3}{4}\right)^{k}$ 이다.

따라서 $n=k+1$ 일 때도 성립하므로 모든 자연수 n 에 대하여 $0<a_n-4\le\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 이 성립 한다.

6번 문항 해설

(1)

(ⅰ) $n=1$ 일 때,

$$\int_0^1 x^m(1-x)\,dx = \int_0^1 x^m\,dx - \int_0^1 x^{m+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} = \frac{1}{(m+1)(m+2)} = \frac{m!\cdot 1!}{(m+2)!}$$

이므로 $p(n)$ 은 성립한다. (… 6 점)

(ⅱ) $n=k$ 일 때, $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면

$$\int_0^1 x^m(1-x)^{k+1}\,dx = \int_0^1 x^m(1-x)^k(1-x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x^m(1-x)^k\,dx - \int_0^1 x^{m+1}(1-x)^k\,dx$$

$$= \frac{m!\cdot k!}{(m+k+1)!} - \frac{(m+1)!\cdot k!}{(m+k+2)!}$$

$$= \frac{m!\cdot k!}{(m+k+2)!}(m+k+2-m-1) = \frac{m!\cdot(k+1)!}{(m+k+2)!}$$

이므로 $n=k+1$ 일 때도 성립한다.

따라서, 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 $p(n)$ 은 성립한다. (…14 점)

(2)

제시문 (ㄴ)의 적분식을 이용하여 제시문 (ㄷ)의 적분을 계산하면,

$$\int_0^1 x^n(1-x)^n\left(1+2\sqrt{3}\,cx+\frac{27}{10}c^2x^2\right)dx$$

$$= \int_0^1 x^n(1-x)^n\,dx + 2\sqrt{3}\,c\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^n\,dx + \frac{27}{10}c^2\int_0^1 x^{n+2}(1-x)^n\,dx$$

$$= \frac{n!\cdot n!}{(2n+1)!} + 2\sqrt{3}\times\frac{(n+1)!\cdot n!}{(2n+2)!}\times c + \frac{27}{10}\times\frac{(n+2)!\cdot n!}{(2n+3)!}\times c^2$$

$$= \frac{n!\cdot n!}{(2n+1)!\cdot(2n+3)}\times\left\{2n+3+(2n+3)\sqrt{3}\,c+\frac{27}{20}(n+2)c^2\right\}$$ 을 얻는다.

(…8점)

따라서 제시문 (ㄷ)의 부등식은 위 괄호 안의 식, 즉 c 에 대한 이차식이 양수이어야 한다는 것과

동치이다. c^2 의 계수 $\frac{27}{20}(n+2)$ 가 양수이므로, 판별식이 음수가 되어야 한다. 판별식은

$3(2n+3)^2 - \frac{27}{5}(2n+3)(n+2) = \frac{2n+3}{5}\{15(2n+3) - 27(n+2)\} = \frac{2n+3}{5}(3n-9)$ 이므로, $\frac{2n+3}{5}(3n-9) < 0$ 이기 위해서는 $n < 3$ 이 성립해야 한다. (…8점)

따라서 제시문 (ㄷ)의 집합 A 는 $\{1, 2\}$ 이다. (…4점)

7번 문항 해설

17번

(1)

$f(x)=(x^3+1)Q(x)+ax^2+bx+c$ 라 하자. (단, $Q(x)$ 는 다항식이고 a, b, c 는 상수이다.) 이때 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ 이므로

$$f(x)=(x^2-x+1)(x+1)Q(x)+a(x^2-x+1)+(a+b)x+(-a+c).$$

$f(x)$ 를 x^2-x+1 로 나눈 나머지는 $x-1$ 이므로

$$a+b=1 \cdots\cdots ①$$
$$-a+c=-1 \cdots\cdots ②$$ 이다.

또한, $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 나머지가 -1 이므로

$f(-1)=a-b+c=-1 \cdots\cdots$ ③ 이다.

①, ②, ③을 연립하면 $a=\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{2}{3}$, $c=-\dfrac{2}{3}$.

그러므로 $f(x)$ 를 x^3+1 로 나눈 나머지는 $\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}$ 이다.

(2)

(ⅰ) $n=1$ 일 때 $g^1(x)=x^4+x-1=x(x+1)(x^2-x+1)-1$ 이므로 $g^1(x)$ 를 x^2-x+1 으로
나눈 나머지는 -1 이다.

(ⅱ) $n=k$ 일 때 $g^k(x)$ 를 x^2-x+1 으로 나눈 나머지가 -1 이라 하자.

즉, $g^k(x)=(x^2-x+1)Q_k(x)-1$ 를 만족하는 다항식 $Q_k(x)$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned} g^{k+1}(x) &= g(g^k(x)) = g((x^2-x+1)Q_k(x)-1) \\ &= \left\{(x^2-x+1)Q_k(x)-1\right\}^4+\left\{(x^2-x+1)Q_k(x)-1\right\}-1 \\ &= (x^2-x+1)Q_{k+1}(x)+(-1)^4+(-1)-1 \\ &= (x^2-x+1)Q_{k+1}(x)-1 \end{aligned}$$

를 만족하는 다항식 $Q_{k+1}(x)$ 가 존재한다. 그러므로 $g^{k+1}(x)$ 를 x^2-x+1 로 나눈 나머지는 -1 이다.

따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 $g^n(x)$ 를 x^2-x+1 으로 나눈 나머지는
항상 -1 로 일정하다.

8번 문항 해설

(1)

정사각형 R_n 의 한 변의 길이를 r_n 이라고 할 때, 다음의 식을 얻을 수 있다.

$r_2\tan\theta + r_2 = r_1$ 이므로 $r_2 = \left(\frac{1}{1+t}\right)r_1$, $r_3\tan\theta + r_3 = r_2$ 이므로 $r_3 = \left(\frac{1}{1+t}\right)r_2$ 이런 과정을 반복하면

$$r_4 = \left(\frac{1}{1+t}\right)r_3$$

$$\vdots$$

$$r_{n+1} = \left(\frac{1}{1+t}\right)r_n$$

따라서 수열 $\{r_n\}$의 공비는 $\frac{1}{1+t}$, $r_1 = 1$ 이다. 그러므로 $r_n = \left(\frac{1}{1+t}\right)^{n-1}$ 이다.

즉 $s_n = (r_n)^2 = \left(\frac{1}{1+t}\right)^{2n-2}$ 이다.

(2)

상수 $\alpha = \left(\frac{1}{1+t}\right)^2$ 라고 하면,

$$\begin{aligned}\frac{P_{2023}}{Q_{2023}} + \frac{Q_{2021}}{P_{2021}} &= \frac{1+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2022}}{\alpha+\cdots+\alpha^{2021}} + \frac{\alpha+\cdots+\alpha^{2019}}{1+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2020}} \\ &= \frac{1+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2020}}{\alpha+\cdots+\alpha^{2021}} + \frac{\alpha^{2021}+(\alpha+\cdots+\alpha^{2019})}{1+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2020}} \\ &= \frac{1}{\alpha} + \alpha\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 삼각형 AOB에서 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $t = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ 이고 $\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1+\sqrt{3}}$ 이다.

따라서 $\alpha = \left(\frac{1}{1+t}\right)^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이고 $\frac{1}{\alpha} + \alpha = 5 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$ 이다.

(추가 해설)

$$\frac{P_{2023}}{Q_{2023}}+\frac{Q_{2021}}{P_{2021}}=\frac{1+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2022}}{\alpha+\cdots+\alpha^{2021}}+\frac{\alpha+\cdots+\alpha^{2019}}{1+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2020}}$$

$$=\frac{1+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2020}}{\alpha(1+\cdots+\alpha^{2020})}+\frac{\alpha^{2022}}{\alpha(1+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2020})}+\frac{\alpha+\cdots+\alpha^{2019}}{1+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2020}}$$

$$=\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha^{2022}+\alpha(\alpha+\cdots+\alpha^{2019})}{\alpha(1+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2020})}$$

$$=\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha^2(1+\cdots+\alpha^{2020})}{\alpha(1+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2020})}$$

$$=\frac{1}{\alpha}+\alpha$$

(3)

(2)에서와 같이, 임의의 자연수 n에 대하여 $\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}+\frac{Q_{2n-1}}{P_{2n-1}}=\alpha+\frac{1}{\alpha}$ 이 성립함을 알 수 있고, $\alpha\neq 1$이므로 $\alpha+\frac{1}{\alpha}>2$임을 알 수 있다.

이제 수학적 귀납법을 사용하여 다음의 명제를 모든 자연수 n에 대해 보이자.

$$\boxed{p(n):\frac{P_{2n+1}}{n+1}>\frac{Q_{2n+1}}{n}\text{이 성립한다.}}$$

$n=1$일 때, $\frac{P_3}{2}=\frac{1+\alpha^2}{2}$이고 $\frac{Q_3}{1}=\alpha$이므로, 주어진 명제는 $\frac{1+\alpha^2}{2}>\alpha$와 동일하고, 이는 $(\alpha-1)^2>0$으로부터 얻어진다. 즉, $p(1)$이 성립한다.

이제 $p(k)$가 성립한다고 가정하자. 그러면, $\frac{P_{2k+1}}{k+1}>\frac{Q_{2k+1}}{k}$이 성립한다.

이때,

$$\frac{P_{2k+3}}{k+2}-\frac{Q_{2k+3}}{k+1}>\frac{Q_{2k+3}}{k+2}\left(2-\frac{Q_{2k+1}}{P_{2k+1}}\right)-\frac{Q_{2k+3}}{k+1}$$

$$\left(\because\frac{P_{2k+3}}{Q_{2k+3}}=\alpha+\frac{1}{\alpha}-\frac{Q_{2k+1}}{P_{2k+1}}>2-\frac{Q_{2k+1}}{P_{2k+1}}\right)$$

$$=\frac{kQ_{2k+3}}{(k+2)P_{2k+1}}\left(\frac{P_{2k+1}}{k+1}-\frac{Q_{2k+1}}{k}\right)>0$$

이 성립하므로 $p(k+1)$이 성립함을 알 수 있다. 따라서, 수학적 귀납법에 의해 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대해 성립한다는 사실을 도출할 수 있고, 특히 $n=1011$일 때 $\frac{P_{2023}}{1012}>\frac{Q_{2023}}{1011}$이 성립한다고 결론지을 수 있다.

9번 문항 해설

(1)

점 $(a,\ a^2)$에서 $y = x^2$의 접선의 방정식은 $y - a^2 = 2a(x-a)$이다. 접선과 직선 $y=2$와의 교점은 $2 - a^2 = 2a(x-a)$를 만족한다.

이때 x좌표가 $f(a)$이므로 $f(a) = a + \dfrac{2-a^2}{2a} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{a}$ 이다.

$a_1 > 0$에 대하여 $a_2 = f(a_1) = \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{1}{a_1}$이고, 산술·기하평균 부등식에 의하여

$$a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{1}{a_1} \geq 2\sqrt{\frac{a_1}{2}\cdot\frac{1}{a_1}} = \sqrt{2}$$ 가 성립한다.

(2)

$n=1$일 때, $a_1 \geq \sqrt{2}$이다.

$n=k$일 때, $a_k \geq \sqrt{2}$를 가정하자. $a_{k+1} = f(a_k) = \dfrac{a_k}{2} + \dfrac{1}{a_k}$이 성립한다.

a_k가 양수이므로 산술·기하평균 부등식에 의하여

$a_{k+1} = \dfrac{a_k}{2} + \dfrac{1}{a_k} \geq 2\sqrt{\dfrac{a_k}{2}\cdot\dfrac{1}{a_k}} = \sqrt{2}$ 가 성립한다.

따라서 수학적 귀납법에 의해서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \geq \sqrt{2}$가 성립한다.

(3)

$a_1 \geq \sqrt{2}$이므로 문항(2)의 결과로부터 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \geq \sqrt{2}$가 성립한다.

$a_{n+1} = f(a_n) = a_n + \dfrac{2-a_n^2}{a_n}$이므로

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2-a_n^2}{a_n} = \frac{(\sqrt{2}+a_n)(\sqrt{2}-a_n)}{2a_n} \leq 0$$ 이 성립한다.

(4)

$b_n = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$이므로, 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} = f(a_n) = a_{n+1}$$

10번 문항 해설

(1) 2 이상인 자연수의 역수는 항상 1보다 작으므로 1개의 원소로 이루어진 조화로운 집합은 존재하지 않는다. ……(1점) 또한, 2 이상인 서로 다른 두 자연수 a, b에 대하여 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{3}<1$이므로 집합 $\{a, b\}$는 조화로운 집합이 될 수 없다. ……(3점) 따라서 조화로운 집합은 반드시 3개 이상의 원소를 포함해야 한다.

(2)

(a) A가 서로 다른 n개의 자연수로 이루어졌다고 하고, $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$라 하자. 집합 $B=\{2, 2a_1, 2a_2, \cdots, 2a_n\}$……(3점) 이 문제의 조건을 만족하는 조화로운 집합임을 증명하자. $1 \not\in A$이므로 $2, 2a_1, 2a_2, \cdots, 2a_n$은 모두 다른 자연수이다. ……(1점) 그리고 B의 정의에 의하여, 임의의 $x \in A$에 대하여 $2x \in B$임을 알 수 있다.

또한, A가 조화로운 집합이므로 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=1$을 만족한다.

따라서 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+\cdots+\frac{1}{2a_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$이 성립하고, ……(3점) B가 문제의 조건을 만족하는 조화로운 집합임을 알 수 있다.

(b) $X=\{3, 4, 5, 6, 20\}$, $Y=\{3x \mid x \in X\}$라 하자. X의 원소 중 3의 배수는 6뿐인데, X는 2를 포함하지 않으므로 두 집합 X와 Y는 서로소이다. 그리고 X가 조화로운 집합이므로 Y의 원소의 역수의 합은 $\frac{1}{3}$이다. 집합 $A=(X-\{3\}) \cup Y$가 조건을 만족하는 조화로운 집합임을 보이자. 우선 $2, 3 \not\in A$는 자명하다. A의 원소의 역수의 합은

(X의 원소의 역수의 합)$-\frac{1}{3}+$(Y의 원소의 역수의 합)$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$ 이므로

A는 조화로운 집합이다. 또한, $n(A)=n(X)+n(Y)-1=9$이므로 조화로운 집합 A는 문제의 조건을 만족한다. ……(8점)

(3)

(a) $\frac{1}{m}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$은 $(p-m)(q-m)=m^2$과 동치인데, 이 등식은 $p-m=1, q-m=m^2$일 때 성립하므로, $p=m+1, q=m^2+m$일 때 성립한다. ……(5점)

(b) 수학적 귀납법을 이용하여 증명하자.

$n=9$일 때, (3-2)에서 2와 3을 포함하지 않고 원소의 개수가 9인 조화로운 집합의 존재성을 증명하였다.

$n>9$에 대하여, $n-1$일 때 명제가 성립한다고 가정하고, n일 때 성립함을 증명하자.

$n-1$일 때 명제가 성립하므로 원소의 개수가 $n-1$이고 $2,3$을 포함하지 않는 조화로운 집합

$X=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-1}\}$가 존재한다. X의 원소 중 a_{n-1}이 가장 크다고 하자. 이제 다음 집합이 조건을 만족하는 조화로운 집합임을 증명하자.

$$\begin{aligned} A &= (X-\{a_{n-1}\})\cup\{a_{n-1}+1,\ a_{n-1}(a_{n-1}+1)\} \\ &= \{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-2},\ a_{n-1}+1,\ a_{n-1}(a_{n-1}+1)\} \end{aligned}$$ ······(5점)

a_{n-1}이 X의 원소 중 가장 큰 원소이므로 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}+1, a_{n-1}(a_{n-1}+1)$은

모두 다르고, $a_{n-1}+1,\ a_{n-1}(a_{n-1}+1)$은 모두 3보다 크다.

따라서 A의 원소의 개수는 n이고, A는 2와 3을 포함하지 않는다.

한편 (3) (a)에 의하여 A의 원소의 역수의 합은 X의 원소의 역수의 합과 같고,

X가 조화로운 집합이므로 A의 원소의 역수의 합은 1이 된다.

$$\frac{1}{a_{n-1}}=\frac{1}{a_{n-1}+1}+\frac{1}{a_{n-1}(a_{n-1}+1)} \text{이므로}$$

$$1=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-2}}+\frac{1}{a_{n-1}+1}+\frac{1}{a_{n-1}(a_{n-1}+1)}$$

따라서 A는 n개의 원소를 갖고, $2,3$을 포함하지 않는 조화로운 집합이다. 그러므로

수학적 귀납법에 의하여 9 이상인 모든 자연수 n에 대하여 원소의 개수가 n이고 $2,3$을 포함하지 않는 조화로운 집합이 존재한다. ······(5점)

11번 문항 해설

(1)

$(a_0, b_0) = (-6, 9)$ 인 경우, $(a_1, b_1) = (3, 3)$ 이 된다. 이 경우에는 방정식 $x^2+3x+3=0$ 의 판별식이 $D=3^2-4\cdot 3=-3<0$ 이므로 실수해가 없다. 따라서 $(-6, 9)$ 의 친화도는 잘 정의되고, 그 값은 1 이다.

(2)

$(a_0, b_0) = (-3, 2)$ 인 경우, $(a_1, b_1) = (2, 1)$ 이고, $(a_2, b_2) = (-1, -1)$ 이다. 일반적으로 (a_k, b_k) 가 주어졌을 때, b_k 가 음수이면, 방정식 $x^2+a_k x+b_k=0$ 의 판별식 $D=a_k{}^2-4b_k$ 가 항상 양수이므로 실수해가 존재한다. 근과 계수의 관계에 의해서 두 해의 곱은 b_k 이므로 음수가 된다. 따라서

$a_{k+1}>0>b_{k+1}$ 이므로 b_{k+1} 도 다시 음수가 된다. 수학적 귀납법에 의해서 모든 $k \geq 2$ 에 대해서 (a_k, b_k) 가 존재하고 b_k 는 음수이다. 따라서 $(-3, 2)$ 의 친화도는 정의되지 않는다.

(3)

앞에서 관찰했듯이, b_k 가 음수가 되는 k 가 있으면 (a_0, b_0) 의 친화도는 정의되지 않는다. (a_0, b_0) 의 친화도가 정의된다고 가정하자. 만약 방정식 $x^2+a_0 x+b_0=0$ 이 실수해를 가지지 않으면 (a_0, b_0) 의 친화도는 0 이다. 방정식 $x^2+a_0 x+b_0=0$ 이 실수해 a_1, b_1 을 가진다고 하자. 만약 b_1 이 음수라면 (a_0, b_0) 의 친화도는 정의되지 않고, $a_1 \geq b_1$ 이므로 a_1, b_1 은 모두 양수여야 한다.

만약 방정식 $x^2+a_1 x+b_1=0$ 이 실수해를 가지지 않으면 (a_0, b_0) 의 친화도는 1 이다. 그런데 방정식 $x^2+a_1 x+b_1=0$ 이 실수해를 가지면, 근과 계수의 관계에 의해서 두 해의 곱은 $b_1>0$ 이고 합은 $-a_1<0$ 이다. 따라서 두 실수해는 모두 음수가 된다. 문제 (2)에 의해 이 경우 (a_0, b_0) 의 친화도는 정의되지 않는다. 따라서 (a_0, b_0) 의 친화도가 정의될 경우, 그 친화도는 0 또는 1 일 수 밖에 없다. 실제 앞의 문제 (1)에서 친화도가 1 이 되는 순서쌍이 있음을 확인했으므로, 친화도의 최댓값은 1 이다.

12번 문항 해설

(1)

a_k 와 a_{k+2} 가 모두 홀수라고 하자. a_n 이 홀수이고 a_{n+1} 이 짝수이면 a_n+a_{n+1} 이 홀수이므로, $a_{n+2}=3(a_n+a_{n+1})+1$ 은 짝수이다. 그런데 a_k 와 a_{k+2} 가 모두 홀수이므로 a_{k+1} 은 홀수이다.

또한, a_n 이 짝수이고 a_{n+1} 이 홀수이면 a_n+a_{n+1} 이 홀수이므로, $a_{n+2}=3(a_n+a_{n+1})+1$ 은 짝수이다. 그런데 a_k 와 a_{k+2} 가 모두 홀수이므로 $k-1$ 이 자연수일 때 a_{k-1} 도 홀수이다. 그러면 $k-2$ 이 자연수일 때 a_{k-1} 과 a_k 가 모두 홀수이므로 a_{k-2} 도 홀수이다.

이와 같은 과정을 반복하면, $a_{k-3}, \cdots, a_1$ 이 모두 홀수임을 얻는다. 따라서 $n \le k+2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 a_n 은 홀수이다. 그러므로 명제 p 는 참이다.

(2)

a_5 가 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 생각하자.

ⅰ) a_5 가 홀수인 경우 :

명제 p 가 참이고 $a_3=19$ 이므로 명제 p 에 의해 $a_1, a_2, \cdots, a_5$ 는 모두 홀수이다.

따라서 $\dfrac{a_4+a_5}{2}=a_6=22$ 이고, $a_5=\dfrac{a_3+a_4}{2}=\dfrac{19+a_4}{2}$ 이다.

그러므로 $a_4+a_5=44$ 이고 $2a_5=19+a_4$ 이다. 따라서 $a_5=21$ 이고 $a_4=23$ 이다.

그런데 $a_2+a_3=2a_4$ 이므로 $a_2=2a_4-a_3=46-19=27$ 이고,

$a_1+a_2=2a_3$ 이므로 $a_1=2a_3-a_2=38-27=11$ 이다.

따라서 수열 $11, 27, 19, 23, 21, 22, \cdots$ 이 주어진 조건을 만족하고 $a_1=11$ 이다.

ⅱ) a_5 가 짝수인 경우 :

이 경우 a_4 가 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 살펴보자

1) a_4 가 홀수인 경우 :

$a_5=\dfrac{a_3+a_4}{2}$ 이고 $a_6=3(a_4+a_5)+1$ 이 성립한다.

따라서 $2a_5=19+a_4$, $a_4+a_5=7$ 이다. 그러므로 $3a_5=26$ 이다.

이를 만족하는 양의 정수 a_5 는 없으므로 주어진 조건을 만족하는 양의 정수 a_1 은 없다.

2) a_4 가 짝수인 경우 :

$a_5=3(a_3+a_4)+1$ 이고 $a_6=\dfrac{a_4+a_5}{2}$ 을 만족한다.

따라서 $a_5=3a_4+58$, $a_4+a_5=44$ 이다. 그러므로 $4a_4+14=0$ 이다. 이를 만족하는 양의 정수 a_4 는 없으므로 주어진 조건을 만족하는 양의 정수 a_1 은 없다.

따라서 $A = \{11\}$ 이다.

13번 문항 해설

(1) 함수 $g(x) = x^2 - x - 1$에 대하여 $g(x) = 0$의 해는 $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$이다.

따라서 $g(x) \le 0$, 즉 $x^2 \le x + 1$의 해는 $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$이다.

그러므로 $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$이다.

구간 $[0, \beta] = \left[0, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$에서 함수 $f(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$은 잘 정의되고,

구간 $\left(0, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$에서 $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left[0, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$에서 증가함수이므로 $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$에서 최댓값을 갖는다.

$f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+1} = 2$ 이므로 구간 $[0, \beta]$에서 $f(x)$의 최댓값은 2이다.

(2) ① 수열 $\{a_n\}$의 첫째항 $a_1 = 2 \ge \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$이다.

$n=k$일 때 $a_k \ge \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$라 가정하면

$(a_{k+1})^2 = a_k + 1 \ge \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ 이 성립한다.

$a_{k+1} > 0$이므로 $n=k+1$일 때 부등식 $a_{k+1} \ge \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$가 성립한다.

따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \ge \beta$가 성립한다.

② 수열 $\{b_n\}$의 첫째항 $b_1 = 1 \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$이다.

$n=k$일 때 $b_k \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$라 가정하면

$b_{k+1} = 2 - \dfrac{1}{b_k+1} \le 2 - \dfrac{1}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+1} = 2 - \dfrac{2}{3+\sqrt{5}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 가 되어

$n=k+1$일 때 부등식 $b_{k+1} \le \dfrac{1+5}{2}$가 성립한다.

따라서 수학적 귀납법에 의해서 모든 자연수 n에 대하여 $b_n \le \beta$가 성립한다.

(3) (1) 문항 ①의 결과로부터 $x \ge \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$일 때 $x^2 \ge x+1$이다.

문항 (2)의 결과로부터 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이므로

$(a_{n+1})^2 = a_n + 1 \leq (a_n)^2$ 이

성립한다. a_n, a_{n+1} 이 양수이므로 $a_{n+1} \leq a_n$ 이 성립한다. 2(문항 (1)의 결과로부터 $0 \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 일 때 $x + \frac{1}{x+1} \leq 2$ 이다. 양수 b_n은 문항 (2)의 결과로부터 모든 자연수 n에 대하여

$b_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이므로 $b_n + \frac{1}{b_n+1} \leq 2$ 이다. 따라서 $b_{n+1} = 2 - \frac{1}{b_n+1} \geq b_n$ 이 성립한다.

14번 문항 해설

(1) 주어진 조건 (i), (ii)에 의해 다음과 같은 부등식을 얻는다.

$0 \le S(0,m] < S(m,2m] < \cdots < S(m^2, m^2+m] \le m$ ·········(1)

이 부등식에는 $m+1$ 개의 서로 다른 정수가 등장하고 이들은 0 이상 m 이하이므로, $0 \le k \le m$ 일 때, $S(km,(k+1)m] = k$ 가 성립한다.

(2)

(a) 먼저 $k-1$ 번째 m-토막과 k 번째 m-토막을 살펴보면 다음과 같다.

$(\underbrace{0, \cdots, 0}_{m-k+1}, \underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{k-1}), (\underbrace{0, \cdots, 0}_{l-1}, 1, *, \cdots, *)$ ·········(2)

여기서 $k-1$ 번째 m-토막의 $l+1$ 번째 항부터 k 번째 m-토막의 l 번째 항까지의 합인 $S(l+(k-1)m, l+km]$ 의 값은 k 가 되고 결국 다음과 같은 부등식이 성립한다.

$k = S(l+(k-1)m, l+km] < S(l+km, l+(k+1)m] < \cdots < S(l+(m-1)m, l+m^2] \le m$

이 부등식에는 $m-k+1$ 개의 서로 다른 정수가 등장하고 이들은 k 이상 m 이하이므로, 등식 $S(l+(j-1)m, l+jm] = j$가 성립한다.

(b) $k=0$ 일 때 성립함은 자명하다. $k-1$ 번째 m-토막에 대하여 성립한다고 가정하자. 이제 k 번째 m-토막이 다음과 같은 꼴임을 보이면 된다.

$$\underbrace{0, \cdots, 0}_{m-k}, \underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{k}$$

k 번째 m-토막에서 처음 1 이 나오는 것이 l 번째 항이라 가정하고, 등식 $l = m-k+1$ 이 성립함을 보이면 증명이 완성된다.

$k-1$ 번째 m-토막부터 m 번째 m-토막을 나열해 놓고 항들의 합 $\sum$를 생각해보자.

우선, (3-1)의 결과에 의해 $\sum = (k-1)+k+(k+1)+ \cdots +m$ 이다. $\sum$를 다른 방법으로 구해보면

다음과 같다. $k-1$ 번째 m-토막의 처음 l 개의 항은 모두 0 이고, 그 다음 항부터 마지막 m 번째 m-토막의 l 번째 항까지의 합을 (3-2)(a)의 결과인 $S(l+(j-1)m, l+jm] = j$ 를 이용해 구해보면 $k+(k+1)+ \cdots + m$ 이고, (3-1)의 결과에 의해 m 번째 m-토막의 모든 항은 1 이므로, 이것에 m 번째 m-토막의 나머지 항들의 합 $m-l$ 을 하면

$\sum = k+(k+1)+ \cdots +m+(m-l)$ 이 된다. 이 두 결과를 비교해보면

$(k-1)+k+(k+1)+ \cdots +m = k+(k+1)+ \cdots +m+(m-l)$

이 되므로 등식 $k-1 = m-l$ 을 얻고, 결국 $l = m-k+1$ 이 되어 증명이 완성되었다.

15번 문항 해설

(1)

(a) i 와 $2m-i$ 가 둘 다 A 의 원소라면 $-2m\in A$ 라는 가정으로부터 $i+(2m-i)+(-2m)=0$ 이 되어 조건에 위배된다. 따라서 둘 다 A 의 원소일 수는 없다.

(b) $i\in\{1,2,\cdots,m\}$ 에 대하여 $-i$ 와 $-2m+i$ 도 동시에 A 에 속할 수 없으므로 ($\because 2m\in A$) 모두 $2m$ 개의 각 쌍에서 숫자 하나씩은 A 의 원소가 될 수 없다. 0 도 빠지므로 A 의 원소는 많아야 $(4m+1)-(2m+1)=2m$ 개다.

(2) 우선 $m=1$ 일 때는 A 가 $\{-2,-1,1,2\}$ 중 3 개의 원소를 포함한다면 주어진 조건을 만족하지 않으므로 A 의 원소는 2 개 이하여야 한다. 이제, 수학적 귀납법에 따라 $m=k$ 일 때 성립한다고 가정하고 $m=k+1$ 일 때 성립함을 보이자. $-2k-2$, $2k+2\in A$ 인 경우는 (4-1) (b)에서 증명하였다. 이제 다음과 같은 3 가지 경우를 따져 보자.

(i) $-2k-2\in A$, $2k+2\not\in A$ 인 경우

① $2k+1\not\in A$ 이면, 집합 $A\cap\{-2k,-2k+1,\cdots,2k-1,2k\}$ 은 수학적 귀납법의 가정에 의해 $2k$ 개 이하의 원소를 갖는다. 따라서 A 는 더 가질 수 있는 원소가 $-2k-2$, $-2k-1$ 뿐이므로 $2k+2$ 개 이하의 원소를 갖는다.

② $2k+1\in A$ 이면, 앞의 (4-1)과 같은 논법에 의해

㉠ $i\in\{1,2,\cdots,k+1\}$ 에 대하여 i, $2(k+1)-i$ 중 하나는 A 에 속하지 않으므로 ($\because -2k-2\in A$) $2(k+1)$ 개의 양의 정수 중 $k+1$ 개가 빠지고 또한 $2k+2\not\in A$ 이므로 모두 $k+2$ 개가 빠진다. 따라서 양의 정수 중에서는 k 개 이하가 A 에 속한다.

㉡ $i\in\{1,2,\cdots,k\}$ 에 대하여 $-i$, $(-2k+1)+i$ 중 하나는 A 에 속하지 않으므로 ($\because 2k+1\in A$), 음의 정수 중에서 k 개가 빠지므로 음의 정수는 $k+2$ 개 이하가 A 에 속한다.

따라서 $n(A)\le k+(k+2)=2(k+1)$ 이다.

(ii) $-2k-2\not\in A$, $2k+2\in A$ 인 경우는 (i)과 대칭적인 이유로 성립한다.

(iii) $-2k-2\not\in A$, $2k+2\not\in A$ 인 경우, 앞의 (i)의 ①과 동일한 수학적 귀납법에 의해

(3) 모든 홀수들의 집합은 $2m$ 개의 원소로 이루어져 있고, 주어진 조건을 만족한다. 왜냐하면 세 홀수의 합이 0 이 될 수는 없기 때문이다.

또 다른 예로는 $A=\{-2m+1,2m+2,\cdots,-m+1\}\cup\{m-1,m,m+1,\cdots,2m-1\}$ 가 있다.

16번 문항 해설

[1]

먼저, $-af_{n+1}+bf_n=(\alpha+\beta)\left(\sum_{k=0}^{n+1}\alpha^{n+1-k}\beta^k\right)-(\alpha\beta)\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha^{n-k}\beta^k\right)$

$$=\left(\sum_{k=0}^{n+1}\alpha^{n+2-k}\beta^k\right)+\left(\sum_{k=0}^{n+1}\alpha^{n+1-k}\beta^{k+1}\right)-\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha^{n+1-k}\beta^{k+1}\right)$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{n+1}\alpha^{n+2-k}\beta^k\right)+\beta^{n+2}$$

$$=f_{n+2}$$

가 성립한다.

[2]

자연수 n에 대하여 명제 $p(n)$을 “f_n과 f_{n+1}이 정수이다”로 설정하자.

$f_1=\alpha+\beta=-a$이고, $f_2=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=a^2+b$이므로 두 수 모두 정수이다.

따라서, 명제 $p(n)$은 $n=1$일 때 참이다.

명제 $p(n)$이 $n=k$일 때 참이라고 가정하면, f_k와 f_{k+1}이 정수이다.

이때, $f_{k+2}=-af_{k+1}+bf_k$이므로, f_{k+2}도 정수이다.

즉, f_{k+1}과 f_{k+2}가 정수이므로 명제 $p(n)$이 $n=k+1$일 때 참이다.

따라서, 수열 $\{f_n\}$의 모든 항이 정수이다.

[3]

동전을 5번 던져 나올 수 있는 (a, b)는 아래의 여섯가지이다.

$$(0, 5),\ (1, 4),\ (2, 3),\ (3, 2),\ (4, 1),\ (5, 0)$$

각각에 대해서 [문제 1- i]의 결과를 적용시키면 아래와 같은 표를 얻을 수 있다.

(a, b)	f_{n+2}	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
$(0, 5)$	$5f_n$	0	5	0	25	0
$(1, 4)$	$-f_{n+1}+4f_n$	-1	5	-9	29	-65
$(2, 3)$	$-2f_{n+1}+3f_n$	-2	7	-20	61	-182
$(3, 2)$	$-3f_{n+1}+2f_n$	-3	11	-39	139	-495
$(4, 1)$	$-4f_{n+1}+f_n$	-4	17	-72	305	-1292
$(5, 0)$	$-5f_{n+1}$	-5	25	-125	625	-3125

의의 표에서와 같이 절댓값 $|f_5|$의 값이 1000보다 큰 경우는 (a, b)가 $(4, 1)$ 또는 $(5, 0)$인 경우이다. 즉, 동전을 5번 던져 앞면이 4번 이상 나오는 경우이다.

동전의 앞면이 4번 나오는 경우는 5가지이고, 앞면이 5번 나오는 경우는 1가지이므로, 모두 6가지이다.

17번 문항 해설

[1]

$n=1$인 경우, $a_1=1=\left(\frac{1}{2}\right)^0=\sum_{i=1}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$이 성립한다. $n=k$일 때 $a_{2k-1}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$라 가정하자.

수열의 규칙으로부터 $a_{2(k+1)-1}=a_{2k+1}=\frac{1}{2}a_{2k}=\frac{1}{2}(a_{2k-1}+2)=\frac{1}{2}a_{2k-1}+1$을 찾을 수 있으며, 가정에 의해 $\frac{1}{2}a_{2k-1}+1=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\right\}+1=\sum_{i=1}^{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$이 되어 $n=k+1$인 경우에도 성립한다. 수학적 귀납법에 의해 $a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

[2]

점 P_n에서 x축과 y축에 내린 수선의 발을 각각 점 $\mathrm{C}_n(\alpha_n, 0)$, 점 $\mathrm{D}_n(0, \beta_n)$이라 하자. $\beta_n=b_n(\alpha_n)^n$이므로 사각형 $\mathrm{OC}_n\mathrm{P}_n\mathrm{D}_n$의 넓이는 $\alpha_n\beta_n=\alpha_n\times b_n(\alpha_n)^n=b_n(\alpha_n)^{n+1}$이다.

$\int_0^{\alpha_n} b_n x^n dx=\frac{1}{n+1}b_n(\alpha_n)^{n+1}$이므로 곡선 $y=b_n x^n$과 x축 및 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{C}_n$으로 둘러싸인 영역의 넓이는 사각형 $\mathrm{OC}_n\mathrm{P}_n\mathrm{D}_n$의 넓이의 $\frac{1}{n+1}$이다.

즉, 삼각형 $\mathrm{C}_n\mathrm{A}_n\mathrm{P}_n$과 삼각형 $\mathrm{D}_n\mathrm{P}_n\mathrm{B}_n$의 넓이의 비는 $1:n$이 되어야 한다. 두 삼각형은 닮음이므로 닮음비는 $1:\sqrt{n}$이고, $\alpha_n : a_{2n-1}-\alpha_n=\sqrt{n} : 1$, $\beta_n : a_{2n}-\beta_n=1 : \sqrt{n}$이므로 $\alpha_n=\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\times a_{2n-1}$, $\beta_n=\frac{1}{1+\sqrt{n}}\times a_{2n}$이다.

$\beta_n=b_n(\alpha_n)^n$이므로 $b_n=\frac{(1+\sqrt{n})^{n-1}}{(\sqrt{n})^n}\times\frac{a_{2n}}{(a_{2n-1})^n}$이고, $c_n=\frac{(1+\sqrt{n})^{n-1}}{(\sqrt{n})^n}$이다.

[3]

점 A_8의 x좌표를 a라 하면 수열의 규칙성에 의해 $B_8(0,\ a+2)$, $A_9\left(\frac{1}{2}a+1,\ 0\right)$, $B_9\left(0,\ \frac{1}{2}a+3\right)$을 구할 수 있다. 점 P_9는 닮음의 비에 의해 선분 A_9B_9를 $1:3$으로 내분하는 점이므로 $\left(\frac{3}{8}a+\frac{3}{4},\ \frac{1}{8}a+\frac{3}{4}\right)$이다. 점 Q의 x좌표를 q라 하고, Q에서 x축과 y축에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하자. 점 P_9에서 x축에 내린 수선의 발을 H_3이라 하자.

두 점 A_8과 B_8을 지나는 직선의 방정식이 $y=-\frac{a+2}{a}x+a+2$이므로, $Q\left(q,\ -\frac{a+2}{a}q+a+2\right)$, $H_1(q,\ 0)$, $H_2\left(0,\ -\frac{a+2}{a}q+a+2\right)$임을 알 수 있다.

(사각형 $A_8A_9B_9B_8$의 넓이)=(삼각형 OA_9B_9의 넓이) - (삼각형 OA_8B_8의 넓이)

$$=-\frac{3(a+2)(a-2)}{8}$$

이므로 사각형 $A_8A_9P_9Q$의 넓이는 $-\frac{3(a+2)(a-2)}{16}$이다.

한편, (사각형 $A_8A_9P_9Q$의 넓이)=(삼각형 $H_3A_9P_9$의 넓이)+(사각형 $H_1H_3P_9Q$의 넓이)

$-$(삼각형 H_1A_8Q의 넓이)

이므로 $-\frac{3(a+2)(a-2)}{32}=-\frac{3(a-2)(2a+3)}{8a}q$을 얻을 수 있다.

즉, 점 Q의 x좌표는 $\frac{3a(a+2)}{4(2a+3)}$이다.

$a=\sum_{i=1}^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{7}$이므로 $\frac{3a(a+2)}{4(2a+3)}=\frac{130305}{152576}$이다.

18번 문항 해설

[1] 대학발표 예시답안

$a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$이므로, $f_n(x) = f_{n-1}(x) \times x^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$이 된다. $f_0(x) = 1$이므로,

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) \times x^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = f_{n-2}(x) \times x^{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}} \times x^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = \dots$$

$$= 1 \times x^{\frac{1}{1} - \frac{1}{1+1}} \times \dots \times x^{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}} \times x^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = x^{1 - \frac{1}{n+1}}$$

이다. 그러므로 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$ 이다.

[2] 대학발표 예시답안

$a_n = n+1$이므로, $f_n(x) = f_{n-1}(x) \times x^{n+1}$이 된다. $f_0(x) = 1$이므로,

$$f_{30}(x) = f_{29}(x) \times x^{31} = f_{28}(x) \times x^{30} \times x^{31} = \dots$$

$$= 1 \times x^2 \times \dots \times x^{30} \times x^{31} = x^{2 + \dots + 30 + 31} = x^{\frac{30 \times 33}{2}} = x^{495}$$

이다.

[3] 대학발표 예시답안

$f_n(x) = x^{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}$이므로 $x^{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}} \geq x^{\frac{2n}{n+1}}$을 증명하면 된다. 또한 $x > 1$ 이므로

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geq \frac{2n}{n+1}$$

을 보이면 된다.

1) $n=1$일 경우, 좌변과 우변은 모두 1이므로 식을 만족한다.

2) $n=k$일 경우, 식을 만족한다고 가정하면, $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \geq \frac{2k}{k+1}$이다. 양변에 $\frac{1}{k+1}$을 더하여 정리하면,

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} + \frac{1}{k+1} \geq \frac{2k}{k+1} + \frac{1}{k+1} = \frac{2k+1}{k+1}$$

이다. 그런데 $\dfrac{2k+1}{k+1} - \dfrac{2(k+1)}{k+2} = \dfrac{k}{(k+1)(k+2)} > 0$이므로,

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i} \geq \frac{2(k+1)}{k+2}$$

이다. 따라서 $n=k+1$에 대해서도 만족하므로 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대해 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geq \frac{2n}{n+1}$가 성립한다.

19번 문항 해설

(1) $a_1 = g(1)\times 1! = a+b=2$,

$a_2 = a_1 + (1+2+2)\times 2! = 2+10 = 12 = g(2)\times 2! = 2(4a+2b)$

을 연립하여 풀면 $a=b=1$, $\therefore\ g(n)=n^2+n$

(2) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = g(n)\times n! = (n^2+n)\times n! = n\times(n+1)!$임을 증명한다.

(i) $n=1$일 때, $1\times(2!)=2$이므로 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, $a_k = k\times(k+1)!$라고 하면

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + (k^2+2k+2)\times(k+1)! \\ &= k\times(k+1)! + (k^2+2k+2)\times(k+1)! \\ &= (k^2+3k+2)\times(k+1)! \\ &= (k+1)(k+2)\times(k+1)! = (k+1)\times(k+2)! \end{aligned}$$

이므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = g(n)\times n!$ 이 성립한다.

20번 문항 해설

[1]

n 번째 단계에서 물의 양은 다음 점화식으로 표현될 수 있다.

$$V_1 = 1\ ,\ \ V_{n+1} = V_n - \frac{1}{4}V_n^{\,2} + 1\ \ (n \geq 1)$$

명제 $0 < V_n < 2$ 가 모든 n 에 대하여 성립함을 보이자.

$n = 1$ 일 때, $V_1 = 1$ 이므로 만족한다.

$n = k$ 일 때, $0 < V_k < 2$ 가 성립한다고 가정하면,

$V_{k+1} = V_k - \frac{1}{4}V_k^{\,2} + 1$ 에서

$$V_{k+1} = -\frac{1}{4}(V_k - 2)^2 + 2$$

이고 $0 < V_k < 2$ 이므로 $1 < -\frac{1}{4}(V_k - 2)^2 + 2 < 2$ 이다.

그러므로 $0 < V_{k+1} < 2$ 이고 $n = k+1$ 일 때 명제가 성립한다.

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $0 < V_n < 2$ 이 성립한다.

[2]

임의의 자연수 n에 대하여 $V_{n+1} > V_n$ 임을 보이자.

$V_{n+1} - V_n = -\frac{1}{4}V_n^{\,2} + 1$ 이고 [논제 I-1]의 결과로부터 모든 자연수 n 에 대하여 $0 < V_n < 2$ 이다.

이를 이용하면 모든 n 에 대하여 $-\frac{1}{4}V_n^{\,2} + 1 > 0$ 이므로 $V_{n+1} - V_n > 0$ 이다.

따라서 용기에 담긴 물의 양 V_n 은 n 이 커짐에 따라 증가한다.

21번 문항 해설

[1]

모든 자연수 n에 대하여 $a_n < 1$임을 보이기 위해 수학적 귀납법을 이용한다.

$n = 1$일 때, $0 \le a_1 < 1$은 만족함이 주어졌고, $n = k$일 때, $a_k < 1$가 성립한다고 하자. 그러면 $1 + a_k < 1 + 1 = 2$이고 $\frac{1 + a_k}{2} = a_{k+1}^2 < 1$이 성립하므로 $a_{k+1} = \sqrt{a_{k+1}^2} < 1$이다. 그러므로 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < 1$이 성립한다.

(다른 풀이)

만약 어떤 자연수 n에 대하여 $a_n = \sqrt{\frac{1 + a_{n-1}}{2}} \ge 1$이 성립한다고 가정하면 $\frac{1 + a_{n-1}}{2} \ge 1$이므로 $a_{n-1} \ge 1$도 성립하여, 이 과정을 반복하면 a_1도 1보다 같거나 크게 된다. 하지만 조건에 $a_1 < 1$로 주어졌으므로 위의 가정은 모순이다. 따라서 $a_n > 1$인 자연수 n은 존재할 수 없다.

[2]

(1)에 의해 $a_n < 1$이므로 $2a_n < a_n + 1 < 2$이고 $a_n < \frac{a_n + 1}{2} = a_{n+1}^2 < 1$이다.

$0 < a_{n+1} < 1$이기 때문에 $a_{n+1}^2 < a_{n+1}$이 참이어서 $a_n < \frac{a_n + 1}{2} = a_{n+1}^2 < a_{n+1}$이 성립한다.

[3]

초항 a_1이 $\cos\theta$로 주어지면 삼각함수의 반각공식에 의해

$a_2^2 = \frac{1 + a_1}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2}$이고 $a_2 = \pm cos\frac{\theta}{2}$이다. 한편 $a_n \ge 0$이고 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$이므로 $\cos\frac{\theta}{2} \ge 0$이고 $a_2 = \cos\frac{\theta}{2}$이다. 그러므로 지금부터 $a_n = \cos\frac{\theta}{2^{n-1}}$임을 수학적 귀납법에 의해 보이자.

$n = k$일 때, $a_k = \cos\frac{\theta}{2^{k-1}}$가 만족한다고 하자.

그러면 $a_{k+1}^2 = \frac{1 + a_k}{2} = \frac{1 + \cos\frac{\theta}{2^{k-1}}}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2^k}$이고

$a_{k+1} \ge 0$이므로 $a_{k+1} = \cos\frac{\theta}{2^k}$이다.

그러므로 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = \cos\frac{\theta}{2^{n-1}}$이 성립한다.

[4]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) = \cos 0 = 1$$

22번 문항 해설

$n=1$일 때, (좌변)$=\dfrac{a+2b}{3}$, (우변)$=\dfrac{a+2b}{3}$이므로 성립한다.

$n=k$일 때, $\left(\dfrac{a+2b}{3}\right)^k \le \dfrac{a^k+2b^k}{3}$가 성립한다고 가정하면

$$\left(\frac{a+2b}{3}\right)^{k+1} \le \frac{a^k+2b^k}{3}\left(\frac{a+2b}{3}\right)=\frac{1}{9}(a^k+2b^k)(a+2b)$$
$$=\frac{1}{9}(a^{k+1}+2a^kb+2ab^k+4b^{k+1})$$

한편 $(3a^{k+1}+6b^{k+1})-(a^{k+1}+2a^kb+2ab^k+4b^{k+1})$
$=2a^{k+1}-2a^kb+2b^{k+1}-2ab^k=2a^k(a-b)-2b^k(a-b)$
$=2(a^k-b^k)(a-b)\ge 0$ (한편, $0\le a\le b$이므로)

따라서 $\dfrac{1}{9}(a^{k+1}+2a^kb+2ab^k+4b^{k+1})\le \dfrac{a^{k+1}+2b^{k+1}}{3}$

그러므로 $\left(\dfrac{a+2b}{3}\right)^{k+1} \le \dfrac{a^{k+1}+2b^{k+1}}{3}$가 성립한다.

이상으로부터 모든 자연수 n에 대하여 $\left(\dfrac{a+2b}{3}\right)^n \le \dfrac{a^n+2b^n}{3}$이 성립한다.