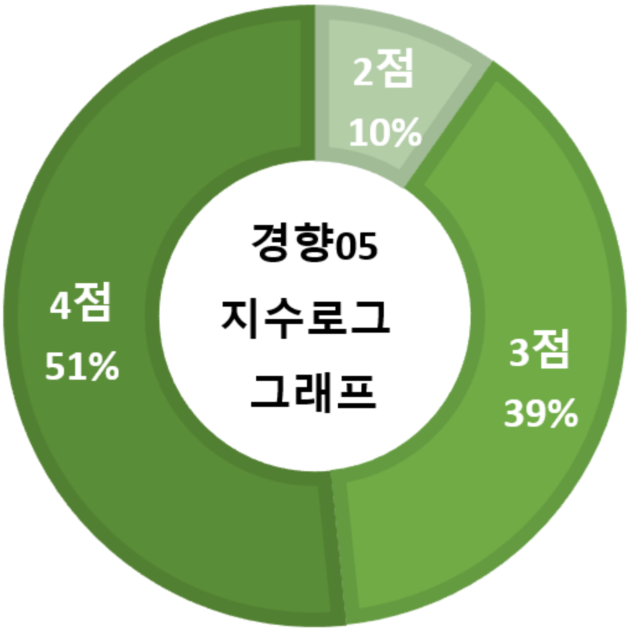
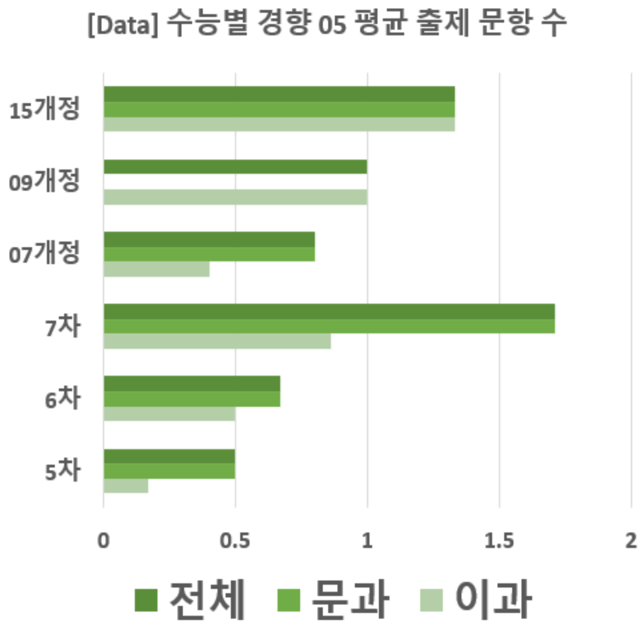
경향 05 Minor Trend

경향05 수능 출제 난이도



경향05 수능별 데이터 (1)



COMMENT

지수로그 단원 내에서 출제 빈도와 평균 배점이 상당히 높은 편이다. 07개정(2012~2016)에서 30번 문제가 여기서 여러 번 출제된 역사도 있고 작년 수능 21번도 이 경향에서 나왔다. 그래프를 그리는 기본기와 지수로그 함수들만의 특징을 알고 있어야 문제가 풀린다. 이 경향의 중요도는 꾸준히 올라가고 있기 때문에 꼭 학습해두도록 하자.

경향05 수능 출제 전망

■■■■■

최근 6개년 100% 출제

전체 30년 동안 70% 출제

경향05 지수로그 단원 내 출제 비율

25%

지수로그 단원에서
4문제가 출제 된다면
1문제 이상 출제 된다.

경향05 수능별 데이터 (2)

경향05 대표문제분석 022

1등급

22. [2024년 수능 (공통) 21번]
양수 a에 대하여 $x \geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x & (-1 \leq x < 6) \\ a\log_4(x-5) & (x \geq 6) \end{cases}$$

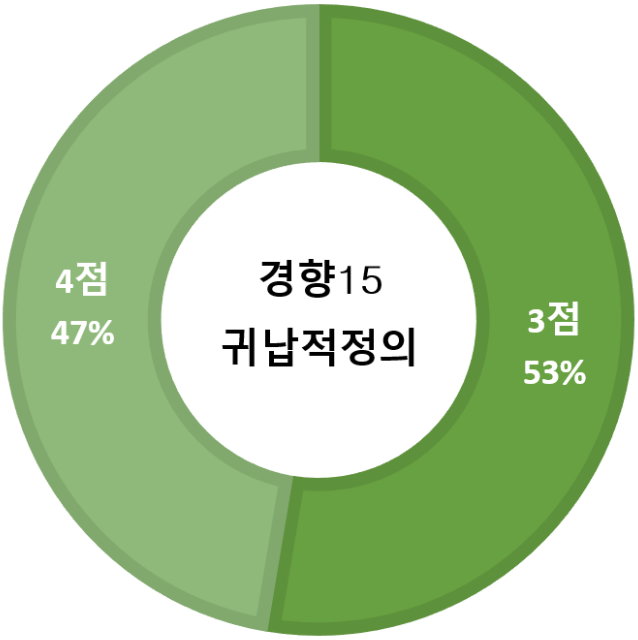
이다. $t \geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1,\ t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0,\ \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

Analysis

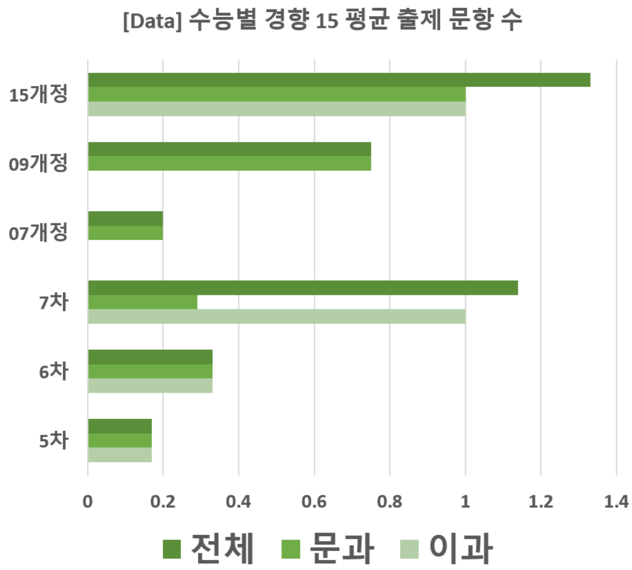
$g(t)$를 규정하는 방식이 미분적분 그래프 고난도 문제에 자주 나오는 방식이다. 그만큼 그래프를 그리는 기본기가 얼마나 탄탄한지를 물어보는 문제이다.

경향 15 Minor Trend

경향15 수능 출제 난이도



경향15 수능별 데이터 (1)



COMMENT

흔히 '점화식'이라고 불리는 수열의 귀납적 정의는 가장 강력한 수열 고난도 문제 출제 후보다. 수열의 종합적 학습을 판단할 수 있는, 수열의 꽃이라 할 수 있다. 작년 수능 15번으로 출제되었다. 하지만 걱정하지 말자. 수능한권에서 충분히 연습하고 든든하게 준비하면 충분히 맞출 수 있다.

경향15 수능 출제 전망

[redacted]

최근 6년 동안 100% 출제

고난도 출제 유력 후보

경향15 수열 단원 내 출제 비율

18.5%

경향15 수능별 데이터 (2)

경향 15 Minor Trend

경향15 대표문제분석 078

1등급

78. [2024년 수능 (공통) 15번]

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 139 ② 146 ③ 153

④ 160 ⑤ 167

Analysis

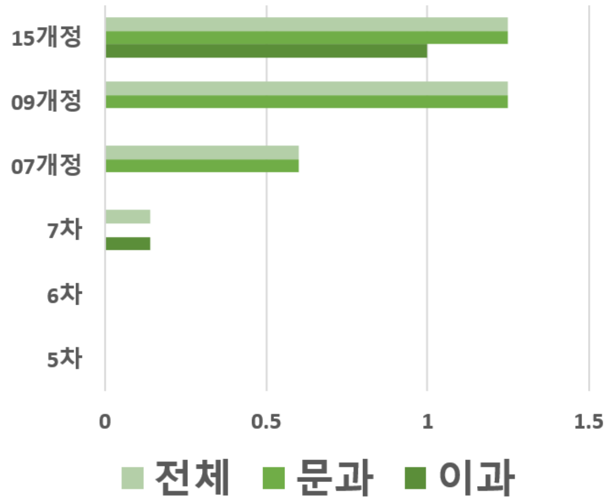
최근 유행하는 점화식의 역주행 문제.
평가원 모의고사에도 여러 차례 출제됐다.
후속 1등급 컨텐츠에서 논리적 접근법을 다룰 예정이니 꼭 참고하도록 하자.

경향 08 Minor Trend

경향08 수능 출제 난이도

경향08 수능별 데이터 (1)

[Data] 수능별 경향 08 평균 출제 문항 수



COMMENT

미분법 단원에서 최고난도 문제가 출제되는 경향이므로 가장 심화된 공부가 필요해. 미분법 그래프 고난도 문항은 그래프 기본기뿐만 아니라 그래프 테크닉과 실전개념들을 다층적으로 적용할 수 있을 지를 물어봐. 하나의 문제에 여러 가지 개념들과 실전개념들이 적용될 뿐 더러 그래프 테크닉까지 함께 갖추고 있어야 풀 수 있지. 하지만 걱정 하지마. 단순히 문제 하나하나씩만 공부하면 이 미분법 고난도 문항을 수능 때 내가 풀 수 있을지 없을지 자신 없겠지만, 고난도 그래프 문항들을 풀기 위한 기본기부터 네가 알아야할 실전개념들을 훈련할 수 있도록 마련해 두었어.

경향08 수능 출제 전망

최근 10년간 100% 출제

경향08 미분법 단원 내 출제 비율

18.18%

경향08 수능별 데이터 (2)

현교육과정
경향08 수능중요도

고난도 접근법 대표문제분석 084

1등급

84. [2024년 수능 (공통) 14번]
두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x \le 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

① 51　② 52　③ 53
④ 54　⑤ 55

고난도 접근법 대표문제분석 070

1등급

70. [2024년 수능 (공통) 22번]
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $f(x)$에 대하여 $$f(k-1)f(k+1)<0$$ 을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오.
[4점]

경향 05 Minor Trend

경향05 대표문제분석 022

1등급

22. [2024년 수능 (공통) 21번]

양수 a에 대하여 $x \geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

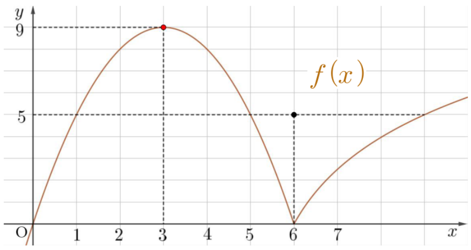
$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x & (-1 \leq x < 6) \\ a\log_4(x-5) & (x \geq 6) \end{cases}$$

이다. $t \geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1,\ t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0,\ \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

10

아무 생각 없이 풀려고 들지 말고
극댓값이 있는 $x=3$, 함수식이 바뀌는 $x=6$
기준으로 관찰해야겠다는 생각을 할 줄 알아야 한다!

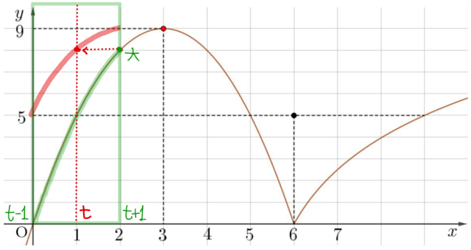


i) $0 < t < 2$인 경우

$t+1 < 3$이므로

$[t-1,\ t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값 $g(t)$는

$g(t)=f(t+1)$

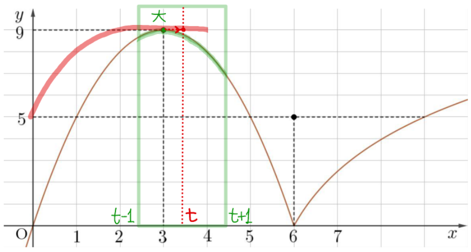


ii) $2 \leq t \leq 4$인 경우

$t-1 \leq 3 \leq t+1$이므로

$[t-1,\ t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값 $g(t)$는

$g(t)=f(3)=9$



Analysis

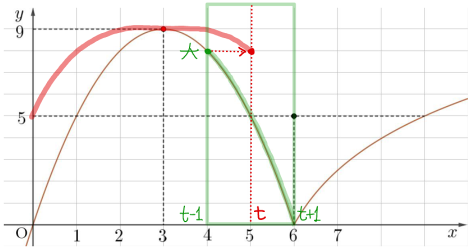
$g(t)$를 규정하는 방식이 미분적분 그래프 고난도 문제에 자주 나오는 방식이다. 그만큼 그래프를 그리는 기본기가 얼마나 탄탄한지를 물어보는 문제이다.

ⅲ) $4<t\leq 5$인 경우

$t-1>3$이므로

$[t-1,\ t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값 $g(t)$는

$g(t)=f(t-1)$



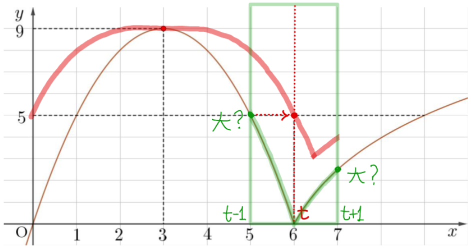
ⅳ) $5<t<7$인 경우

$[t-1,\ t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값 $g(t)$는

a값에 따라 다르다. 아래 둘 중 큰 값이다.

ⓐ $g(t)=f(t-1)=-(t-1)^2+6(t-1)$ $(\because t-1<6)$

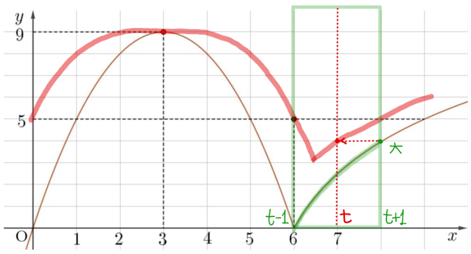
ⓑ $g(t)=f(t+1)=a\log_4\{(t+1)-5\}$ $(\because t+1>6)$



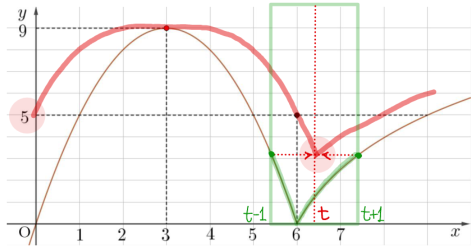
ⅴ) $t\geq 7$인 경우

$[t-1,\ t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값 $g(t)$는

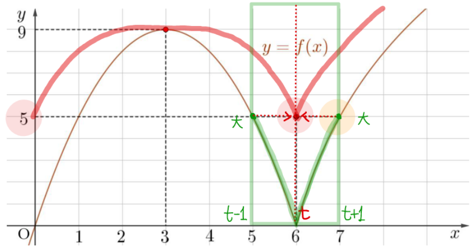
$g(t)=f(t+1)$



$g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하려면 $f(7)\geq 5$이어야 한다.



$\Downarrow$



$\therefore$ $a\log_4 2\geq 5$ ⇔ $a\geq 10$

$\therefore$ 양수 a의 최솟값은 10이다.

경향 15 Minor Trend

경향15 대표문제분석 078

1등급

78. [2024년 수능 (공통) 15번]

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우})\\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 139 ② 146 ③ 153
④ 160 ⑤ 167

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

a_1이 자연수이고

$$a_{n+1}=\begin{cases}2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우})\\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

이므로 $a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow \cdots$ 모두 자연수이다.

$\therefore$ 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 자연수이다.

$a_6+a_7=3$에서

ⅰ) $a_6=1,\ a_7=2$인 경우

ⅱ) $a_6=2,\ a_7=1$인 경우

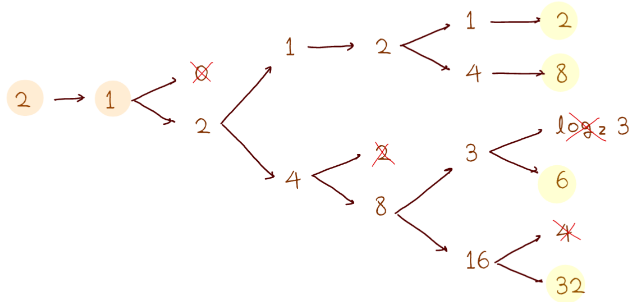
두 가지 경우뿐이다.

점화식의 역주행 문제 → 역주행 최적화식 만들기

$$\begin{cases}\log_2 a_{n+1}=a_n & (a_n\text{이 홀수인 경우})\\ 2a_{n+1}=a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

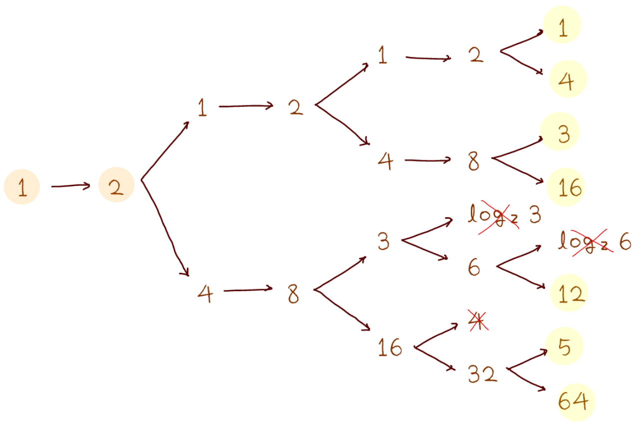
ⅰ) $a_6=1,\ a_7=2$인 경우

$a_7 \rightarrow a_6 \rightarrow a_5 \rightarrow a_4 \rightarrow a_3 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1$



ⅱ) $a_6=2,\ a_7=1$인 경우

$a_7 \rightarrow a_6 \rightarrow a_5 \rightarrow a_4 \rightarrow a_3 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1$



$\therefore$ 모든 a_1의 값의 합은

$1+2+3+4+5+6+8+12+16+32+64=153$

Analysis

최근 유행하는 점화식의 역주행 문제.
평가원 모의고사에도 여러 차례 출제됐다.
후속 1등급 컨텐츠에서 논리적 접근법을 다룰 예정이니 꼭 참고하도록 하자.

고난도 접근법 [수II 미분법 | 적분법]

고난도 접근법 대표문제분석 084

1등급

84. [2024년 수능 (공통) 14번]
두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x \le 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k)+\lim_{t\to k-} g(t)+\lim_{t\to k+} g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

① 51 ② 52 ③ 53
④ 54 ⑤ 55

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

(Step1) 그래프 개형 파악하기

$x \le 2$에서

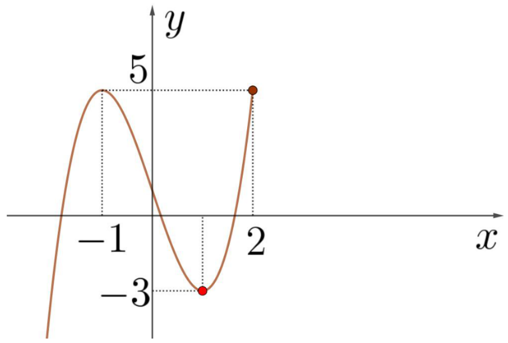
$f(x)=2x^3-6x+1$

$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$\therefore$ $f(x)$는 $x=-1$, 1에서 극값을 갖고

$f(-1)=f(2)=5$이므로 $f(1)=-3$

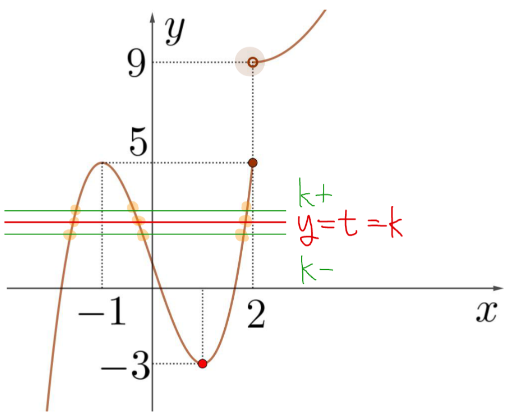
$x \le 2$에서 $f(x)$의 그래프는 아래와 같다.



함수 $y=a(x-2)(x-b)+9$의 그래프는 두 점 $(2, 9)$, $(b, 9)$를 지난다.

i) $b \le 2$인 경우

$g(k)+\lim_{t\to k-} g(t)+\lim_{t\to k+} g(t)=9$인 실수 k의 개수는 무수히 많다.



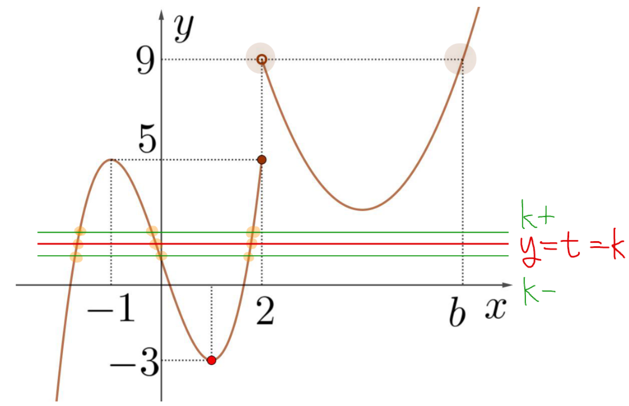
$g(k)+\lim_{t\to k-} g(t)+\lim_{t\to k+} g(t)$

$=3+3+3=9$

ⅱ) $b>2$인 경우

(1) 이차함수 $y=a(x-2)(x-b)+9$의 꼭짓점의 y좌표가 -3보다 크면

$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$인 실수 k의 개수는 무수히 많다.

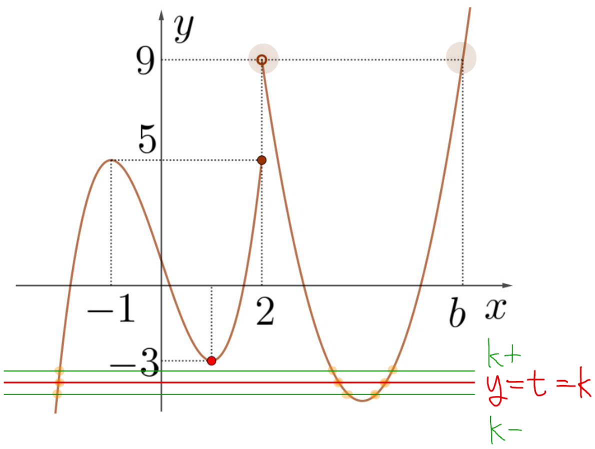


$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)$

$=3+3+3=9$

(2) 이차함수 $y=a(x-2)(x-b)+9$의 꼭짓점의 y좌표가 -3보다 작으면

$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$인 실수 k의 개수는 무수히 많다.

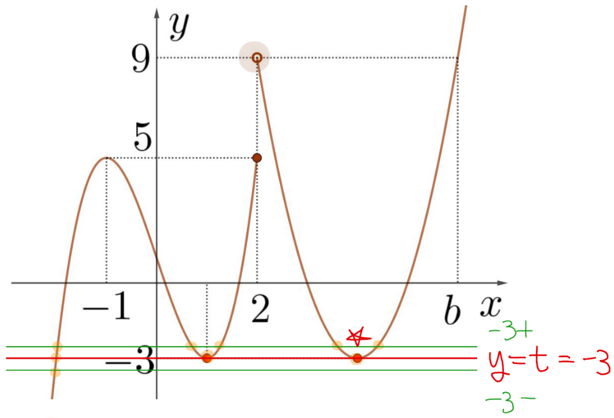


$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)$

$=3+3+3=9$

(3) 이차함수 $y=a(x-2)(x-b)+9$의 꼭짓점의 y좌표가 -3이면

$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$인 실수 $k=-3$으로 유일하다.



$g(-3)+\lim_{t\to -3-}g(t)+\lim_{t\to -3+}g(t)$

$=3+1+5=9$

$\therefore\ y=a(x-2)(x-b)+9$는

$x=\dfrac{b+2}{2}$에서 꼭짓점을 가지므로

$f\left(\dfrac{b+2}{2}\right)=-3$

(step2) a, b가 자연수라는 조건을 활용하기

케이스 나열!

$f\left(\dfrac{b+2}{2}\right)=-3$

$\Leftrightarrow\ a\left(\dfrac{b}{2}-1\right)\left(1-\dfrac{b}{2}\right)+9=-3$

$\Leftrightarrow\ a(b-2)^2=48=48\times1^2=12\times2^2=3\times4^2$

ⅰ) $a=48,\ b=3$ ($\because\ b>2$)

ⅱ) $a=12,\ b=4$

ⅲ) $a=3,\ b=6$

$\therefore\ a+b$의 최댓값은

$48+3=51$

고난도 접근법 [수II 미분법 | 적분법]

고난도 접근법 대표문제분석 070

1등급

70. [2024년 수능 (공통) 22번]
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

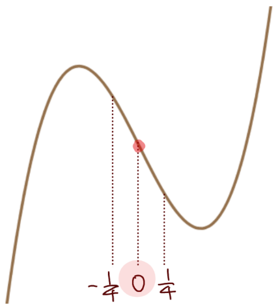
> 함수 $f(x)$에 대하여
> $$f(k-1)f(k+1)<0$$
> 을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

483

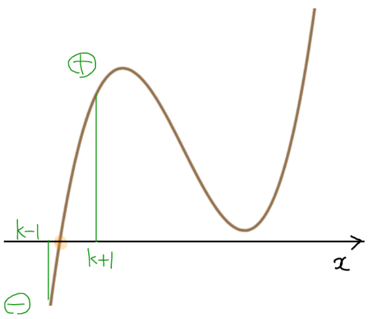
함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수이고
$f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$이므로 그래프의 개형은 아래와 같다.



이때 $f'(0)<0$이라는 것을 주목하자.

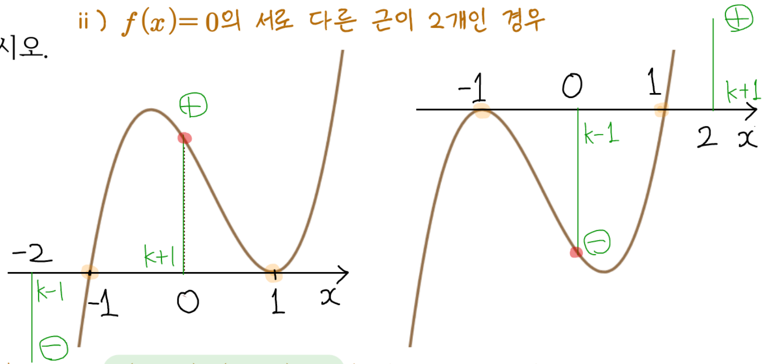
$f(k-1)$과 $f(k+1)$의 부호 다르면
$f(k-1)f(k+1)<0$이다.
→ 삼차함수는 부호변화가 반드시 존재한다.
그럼에도 $f(k-1)f(k+1)<0$인 정수 k가 존재하지
않으려면 부호가 변화하는 부근에서
$f(k-1)=0$ 또는 $f(k+1)=0$이면 된다.
→ 즉 $f(x)=0$의 근이 정수인 그래프 위주로 관찰할 생각을 할 수 있어야 한다!

i) $f(x)=0$의 서로 다른 근이 1개인 경우



∴ $f(k-1)f(k+1)<0$인 정수 k 존재 (모순)

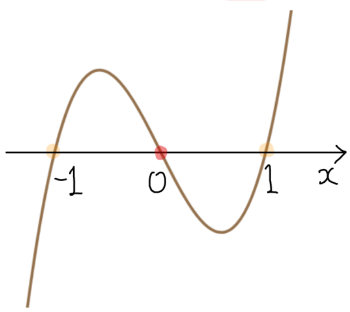
ii) $f(x)=0$의 서로 다른 근이 2개인 경우



∴ $f(k-1)f(k+1)<0$인 경우 존재 (모순)

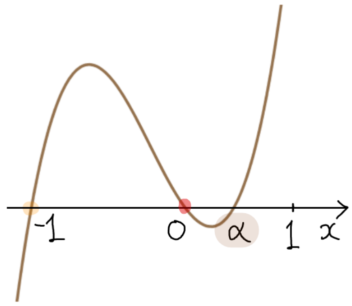
iii) $f(x)=0$의 서로 다른 근이 3개인 경우
$f(x)$의 그래프가 감소하는 부분이 x축과 만나게 되는데
감소하는 구간에 정수 $x=0$이 포함되어 있으므로
0과 가장 가까운 정수인 -1, 1에서
$f(x)=0$이 되는 것을 기준으로 케이스를 나눠보자.

iii-1) $f(-1)=f(0)=f(1)=0$인 경우



모든 정수 k에 대하여
$f(k-1)f(k+1)\geq 0$이 성립하지만
$f(x)=(x+1)x(x-1)=x^3-x$
$f'(x)=3x^2-1$
$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{13}{16}\neq-\frac{1}{4}$ (모순)

iii-2) $f(1)\neq 0$, $f(-1)=f(0)=0$인 경우
나머지 한 근을 α라고 하자.
모든 정수 k에 대하여
$f(k-1)f(k+1)\geq 0$이 성립하려면 $0<\alpha<1$이다.



$f(x)=(x+1)x(x-\alpha)=(x^2+x)(x-\alpha)$

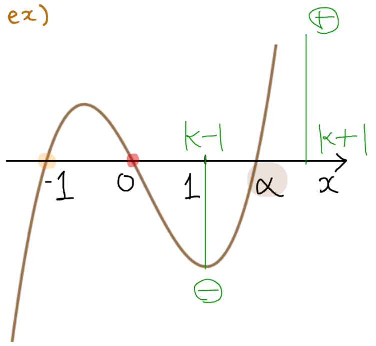
$f'(x)=(2x+1)(x-\alpha)+(x^2+x)$

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{5}{16}+\frac{1}{2}\alpha=-\frac{1}{4}$

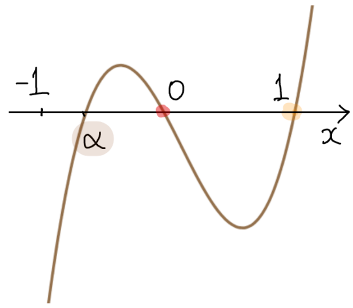
$\therefore\ \alpha=\frac{1}{8}$

$\therefore\ 0<f'\left(\frac{1}{8}\right)<f'\left(\frac{1}{4}\right)$인데 $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$에 모순

※ $\alpha>1$이면
$f(k-1)f(k+1)<0$인 정수 k 존재 (모순)
ex)



iii-3) $f(-1)\neq 0$, $f(0)=f(1)=0$인 경우
나머지 한 근을 α라고 하자.
모든 정수 k에 대하여
$f(k-1)f(k+1)\geq 0$이 성립하려면 $-1<\alpha<0$이다.



$f(x)=(x-\alpha)x(x-1)=(x^2-x)(x-\alpha)$

$f'(x)=(2x-1)(x-\alpha)+(x^2-x)$

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{11}{16}+\frac{3}{2}\alpha=-\frac{1}{4}$

$\therefore\ \alpha=-\frac{5}{8}$

$\therefore\ f(x)=\left(x+\frac{5}{8}\right)x(x-1)$

$\therefore\ f(8)=483$

※ $\alpha<-1$이면
$f(k-1)f(k+1)<0$인 정수 k 존재 (모순)
ex)