2016학년도 논술 모의고사 4회 (수학) 해설 & 예시 답안

 안녕하세요! 정말 끈질기게 여러분들을 찾아가는 正進입니다~
 이야..... 이 모의고사를 3회까지 만들고 나서 4회 만들기 전까지 정말 많은 일이 있었어요~! 가장 큰 건 제가 직접 만든 극혐 난이도의 '正進 최고난도 모의고사 화학1'을 시행했다는 것이지요. 이 해설지를 작성하고 있는 시점에서 이미 330명이 넘는, 정말 많은 분들이 저의 모의고사를 다운해 주셨습니다. 듣보잡에 불과했던 저인데도 많은 분들의 관심 덕분에 제 모의고사가 빛을 보게 되어서 정말 기분 좋습니다! 이 논술 모의고사를 풀어주시는 분들도 포함해서 저의 제작물을 풀어주시는 모든 분께 다시 한 번 감사의 인사를 드립니다.(꾸벅) ...솔직히 1회는 너무 어려워서 반성하고 2회 모의고사는 좀 쉽게 만들고 있습니다. 최대한 빨리 2회 문제도 공개할게요.
 그건 그렇고 이번 4회는 정말 쓸게 역대급으로 많았습니다. 일단 제시문부터 B4 한 장을 빡빡하게 채워 넣었고(가톨릭대학교 의대 논술이 이렇게 제시문이 한 페이지 꽉꽉 채우는 형태입니다.), 논제도 총 10개씩이나 되었고, 게다가 무한급수의 일반항들이 정말 복잡하게 서술되어 있어서, 쓰다가 욕 한번 하셨을 지도 모르겠습니다. 하지만, [논제 1-3]이랑 [논제 3-4]만 딸랑 있었으면 정말 어떻게 해야 할 지도 감을 못 잡거나, 뭐, 그럴 수 있어서 차근차근 단계적으로 나아갈 수 있게 한 것이었습니다만........ 머, 덕분에 논제의 양이 엄청나게 늘어나 버렸지요.....
 이번 4회의 비하인드 스토리(?) 같은 이야기를 하자면, 원래 이상 적분은 3회에 넣으려 했던 주제입니다만, 이번 4회의 내용이 떠오르기도 했고, 3회의 내용도 쓸게 많아보여서 결국 3회에서 떨어져 나와 독립한, 그런 회차입니다.
 그럼 이번 4회차 출제 의도와 예시 답안, 채점 기준을 공개하겠습니다. 이번에도 역시 계산 실수로 인한 감점은 1문제당 2점이며, 논리상 모순이 없으면서 같은 결론이 유도된 답안은 모두 정답처리입니다.

[논제 1]

 [논제 1-1] $1 < x$인 임의의 실수 x에 대하여 $\dfrac{x-1}{x} < \ln x < x-1$임을 보이시오. [10점]

출제 의도 : 미분을 이용하여 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있다.

 이런 류의 문제는 수능과 비슷한 내용이라서 쉽게 해결할 수 있었을 겁니다.

예시 답안 : 함수 $f(x) = \ln x - (x-1)$이라 하자.(단, $x > 1$) $f(x)$는 미분 가능한 함수이므로 미분하면 $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 < 0 (\because x > 1)$이다. $f'(x)$는 $x=1$에서 정의되지 않았으므로 제시문 (라)와 (마)에 의해 $\displaystyle\lim_{a \to 1+0} \int_a^x f'(t)dt < 0$[1]이다.

$$\therefore \ f(x) = \ln x - (x-1) < \lim_{a \to 1+0} f(a) = \lim_{a \to 1+0} \ln a - (a-1) = 0 \quad (\cdots\cdots ①)$$

또 함수 $g(x) = x\ln x - (x-1)$라 하면 $g(x)$도 미분 가능한 함수이므로 $g'(x) = \ln x > 0 (\because x > 1)$이

---

1) $\displaystyle\lim_{a \to 1+0}$ 과 같은 표현은 7차 개정 교육과정에 의한 표현입니다. 2015년 현재 고등학교 2학년들이 배우는 극한으로는 $\displaystyle\lim_{a \to 1+}$같이 표현합니다.

며, 제시문 (라)와 (마)에 의해 $\lim_{b \to 1+0} \int_b^x g'(t)dt > 0$에서 $g(x) = x\ln x - (x-1) > \lim_{b \to 1+0} g(b) = 0$이다.

$$\therefore \frac{x-1}{x} < \ln x < x-1 \ (\because x > 1) \quad (\ \cdots\cdots \ ② \ )$$

채점 기준
함수 $f(x) = \ln x - (x-1)$를 설정하고 $f(x) < 0$임을 보임. (①) ……………… 4점
함수 $g(x) = x\ln x - (x-1)$을 설정하고 $g(x) > 0$임을 보이고, ①과 종합하여 결론을 도출함. (②) ……………… 6점
(이외에도 $f(x)$가 감소함수, $g(x)$가 증가함수임을 이용하여 $f(x) < 0$, $g(x) > 0$임을 보인 경우나 논리적으로 모순이 없을 경우에도 정답처리.)

[논제 1-2] $1 < \alpha$인 임의의 상수 α가 존재하여 구간 $(1, \alpha)$ 내의 모든 x에 대하여 $\frac{\ln \alpha}{\alpha - 1} < \frac{\ln x}{x-1}$임을 보이시오. [10점]

출제 의도 : 미분을 이용하여 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있다.

이번 논제도 [논제 1-1]과 똑같은 방식으로 하면 쉽게 해결할 수 있습니다.

예시 답안 : 함수 $h(x) = \ln x - \frac{\ln \alpha}{\alpha - 1}(x-1)$이라 하자. 그러면 $h(x)$는 미분 가능한 함수이므로 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln \alpha}{\alpha - 1}$이다. 이때, [논제 1-1]에 의해 $\alpha > 1$인 α에 대하여 $\frac{1}{\alpha} < \frac{\ln \alpha}{\alpha - 1} < 1$이므로 $h'(x) = 0$인 x에 대하여 $1 < x = \frac{\alpha - 1}{\ln \alpha} < \alpha$이다. (…… ①) 따라서 $1 < x < \frac{\alpha - 1}{\ln \alpha}$인 x에서 $h'(x) > 0$이고, $\frac{\alpha - 1}{\ln \alpha} < x < \alpha$인 x에서 $h'(x) < 0$이므로 $h(x)$의 최댓값은 $x = \frac{\alpha - 1}{\ln \alpha}$일 때이고, $\lim_{x \to 1+0} h(x) = \lim_{x \to \alpha - 0} h(x) = 0$이므로 제시문 (나)에 의해 $h(x) > 0$이다.

$$\therefore \frac{\ln \alpha}{\alpha - 1} < \frac{\ln x}{x-1} \quad (\ \cdots\cdots \ ② \ )$$

채점 기준
함수 $h(x)$를 설정하고, $h'(x) = 0$인 x의 범위를 구함. (①) ……………… 5점
$h(x) > 0$임을 보임으로써 결론을 도출함. (②) ……………………………… 5점
(이외에도 논리적으로 모순이 없을 시 모두 정답처리.)

이 정도 난이도라면 아마 수능에서 빈칸 채우기 문제 정도로 바꾸어도 괜찮을 듯합니다.

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)

[논제 1-3] 이상적분부등식 $0<\int_1^e \frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx<2(e-1)$임을 보이고, $\int_1^e \frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx$의 수렴성 여부를 판정하시오. [20점]

출제 의도 : 이상 적분을 활용하여 주어진 부등식이 성립함을 보이고, 제시문을 이용하여 주어진 적분식이 성립함을 보일 수 있다.

제시문을 읽다 보면 ''이상 적분'을 난생 처음 접해본다'하시는 분들도 계실 텐데요. 제작자도 개념만 알고 정확한 정의는 제대로 공부하지 않아서 잘은 모르겠지만(어이! 잘 알지도 못하면서 논제로 만든 거냐!) 위키질로 정의를 훑어본 결과(본격적으로 신뢰도가 뚝뚝 떨어지는 발언만 골라 하는 제작자), 고등학교 수준의 적분과 극한만 잘 이해하면 바로 이해할 수 있는 내용이 바로 이상 적분이라 판단하고 논술 모의고사를 구성하는 데 활용하였습니다. 사실 이상 적분이라는 게 별거 없습니다. 그냥 정적분으로 나타낸 함수에 극한을 취하는 것밖에 되지 않기 때문이지요.

예시 답안 : [논제 1-2]에 의하면 $\alpha=e$일 때, $\frac{\ln x}{x-1}>\frac{1}{e-1}$이고, $x>1$이므로 제시문 (라)의 성질 ⅱ)에 의해 $1<a<e$인 상수 a에 대해 $0<\int_a^e \frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx<\int_a^e \frac{\sqrt{e-1}}{\sqrt{x-1}}dx$이다. (…… ①) 제시문 (마)에 의하여 $\lim_{a\to 1+0}\int_a^e \frac{\sqrt{e-1}}{\sqrt{x-1}}dx=\lim_{a\to 1+0}2\sqrt{e-1}\,[\sqrt{x-1}\,]_a^e=\lim_{a\to 1+0}2(e-1)-2\sqrt{e-1}\sqrt{a-1}$ $=2(e-1)$이므로 다음이 성립한다.

$$0<\lim_{a\to 1+0}\int_a^e \frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx=\int_1^e \frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx<\lim_{a\to 1+0}\int_a^e \frac{\sqrt{e-1}}{\sqrt{x-1}}dx=2(e-1) \quad (\text{ …… ② })$$

함수 $f(x)=\int_x^e \frac{1}{\sqrt{\ln t}}dt$라 하자. 그러면 제시문 (라)의 성질 ⅰ)에 의해 $f(x)$는 미분 가능한 함수이므로 $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{\ln x}}<0$이다. $f(x)$는 감소함수로 $1<x_1<x_2$인 x_1, x_2에 대해 $\lim_{x\to 1+0}f(x)>f(x_1)>f(x_2)$이다. 따라서 $\frac{1}{\sqrt{\ln x}}>0$이므로 $1<x<e$인 x에 대해 $0<f(x)<\int_1^e \frac{1}{\sqrt{\ln t}}dt$이고, $\int_1^e \frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx<2(e-1)$이므로 제시문 (다), (마)에 의해 $\lim_{x\to 1+0}f(x)=\int_1^e \frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx$는 수렴한다. (…… ③)

채점 기준

①의 부등식이 성립함을 보임. ……………………………………………………………… 5점

제시문의 이상 적분을 이용하여 주어진 부등식이 성립함을 보임. (②) ……………………………… 5점

함수 $f(x)=\int_x^e \frac{1}{\sqrt{\ln t}}dt$를 설정하고, $f(x)$가 감소함수임을 이용하여 주어진 적분식이 수렴함을 보임. (③) …………………………………………………… 10점

(이외에도 ③의 경우 그래프로 그린 후 제시문을 이용하여 보인 경우에도 정답 처리.)

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)

여기서 ③의 내용이 조금 이해가 가지 않으시는 분들은 한번 $\dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}$의 그래프를 그리시고 $x=t$ $(1<t<e)$에서 $x=e$까지의 넓이가 t가 1로 가까이 감에 따라 어떻게 되는지 확인해 보시면 됩니다.

[논제 2]

[논제 2-1] 0 이상의 정수 n에 대하여 $\mathrm{A}_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$라 할 때, 2 이상의 자연수 n에 대하여 A_n의 점화식을 구하고, 0 이상의 정수 m에 대하여 A_{2m+1}의 일반항을 구하시오. (단, $\mathrm{A}_0=\dfrac{\pi}{2}$, $\mathrm{A}_1=1$이다.) [15점]

출제 의도 : 부분 적분법을 활용하여 주어진 점화식과 일반항을 구할 수 있다.

이 내용을 사실 매우 유명해서 여러 고난도 문제집에는 실려 있는 적분식으로 다들 한번쯤은 한번 적분을 해 보았을 식일 겁니다.

예시 답안 : $n\ge 2$인 자연수 n에 대하여 부분 적분법을 이용하면

$$\mathrm{A}_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\sin^{n-2}x dx=\mathrm{A}_{n-2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\cos x\sin^{n-2}x dx$$

$$=\mathrm{A}_{n-2}-\left[\frac{1}{n-1}\cos x\sin^{n-2}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n-1}\sin^n x dx=\mathrm{A}_{n-2}-\frac{1}{n-1}\mathrm{A}_n$$

이다. 따라서 $\mathrm{A}_n=\dfrac{n-1}{n}\mathrm{A}_{n-2}$(단, $n\ge 2$, $\mathrm{A}_0=\dfrac{\pi}{2}$, $\mathrm{A}_1=1$)이다. (…… ①)

자연수 m에 대하여 $\mathrm{A}_{2m+1}=\dfrac{2m}{2m+1}\mathrm{A}_{2m-1}=\dfrac{2m}{2m+1}\cdot\dfrac{2(m-1)}{2m-1}\cdot\dfrac{2(m-2)}{2m-3}\cdot\ \dots\ \cdot\dfrac{2}{3}\mathrm{A}_1$ $=\dfrac{2^m\cdot m!\cdot 2^m\cdot m!}{(2m+1)!}=\dfrac{4^m\cdot(m!)^2}{(2m+1)!}$이다. 이때, $m=0$에 대해서 $\mathrm{A}_1=\dfrac{4^0\cdot(0!)^2}{1!}=1$이므로 0 이상의 정수 m에 대하여 $\mathrm{A}_{2m+1}=\dfrac{4^m\cdot(m!)^2}{(2m+1)!}$이다. (…… ②)

채점 기준
부분 적분법을 이용하여 A_n의 점화식을 유도함. (①) ································ 7점
①에서 유도한 점화식을 풀어 A_{2m+1}의 일반항을 유도함. (②) ···················· 8점
(이외에도 논리적으로 모순이 없을 시 모두 정답처리.)

[논제 2-2] 0 이상의 정수 n에 대하여 $\mathrm{B}_n=\displaystyle\int_1^e\sqrt{\ln x}^{\,n}dx$라 할 때, B_{n+2}의 점화식을 구하시오. [10점]

출제 의도 : 부분 적분법을 이용하여 주어진 점화식을 유도할 수 있다.

비교적 쉬운 논제입니다만, $x \cdot \frac{1}{x}$가 보이지 않으신 분들은 해결하기 어려웠을 겁니다. 하지만 그래도 치환을 이용했다면 조금은 할 만 했겠지요.

예시 답안 : 0 이상의 정수 n에 대하여 부분 적분법에 의해 다음이 성립한다.
$\mathrm{B}_n = \int_1^e x \cdot \frac{1}{x}(\ln x)^{\frac{n}{2}}dx = \left[\frac{1}{1+\frac{n}{2}}x(\ln x)^{\frac{n}{2}+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{1+\frac{n}{2}}(\ln x)^{\frac{n}{2}+1}dx = \frac{2e}{n+2} - \frac{2}{n+2}\mathrm{B}_{n+2}$이다. 따라서 $\frac{2}{n+2}\mathrm{B}_{n+2} + \mathrm{B}_n = \frac{2e}{n+2}$이다.

채점 기준
부분 적분을 활용하여 B_n의 점화식을 유도함. ································ 10점
(이외에도 논리적으로 모순이 없을 시 모두 정답처리.)

[논제 2-3] [논제 2-2]의 수열 B_n과 임의의 자연수 n에 대하여 수열 $\mathrm{C}_{n-1} = -2\frac{(-4)^{n-1}n!}{(2n-1)!}\mathrm{B}_{2n-1}$임을 이용하여 0 이상의 정수 n에 대하여 B_{2n+1}의 일반항을 구하시오. (단, B_1의 값은 계산하지 마시오.) [25점]

출제 의도 : 치환을 통하여 주어진 점화식을 풀어 일반항을 유도할 수 있다.

아마 이 부분이 꽤 많이 까다로웠을 겁니다. 일단, 저 무시무시한 식을 보세요. 정말 답안을 쓰고자 하는 의욕을 꺾어버리는 복잡함입니다. 하지만, 꼼꼼하게, 천천히 하나하나 조심해서 쓴다면 쉽게 해결할 수 있었을 겁니다.

예시 답안 : [논제 2-2]의 점화식 $\frac{2}{n+2}\mathrm{B}_{n+2} + \mathrm{B}_n = \frac{2e}{n+2}$에서 $\mathrm{B}_{2n-1} + \frac{2}{2n+1}\mathrm{B}_{2n+1} = \frac{2e}{2n+1}$이고, 양 변에 $-2\frac{(-4)^{n-1}n!}{(2n-1)!}$을 곱하면 다음과 같은 식이 유도된다.

$$-2\frac{(-4)^{n-1}n!}{(2n-1)!}\left(\mathrm{B}_{2n-1} + \frac{2}{2n+1}\mathrm{B}_{2n+1}\right) = -2\frac{(-4)^{n-1}n!}{(2n-1)!}\frac{2e}{2n+1}$$

$$\rightarrow \mathrm{C}_{n-1} + (-4)\frac{(-4)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(2n-1)!}\frac{1}{2n+1}\mathrm{B}_{2n+1} = \frac{(-4)^n\cdot(n-1)!}{(2n-1)!\cdot(2n+1)}$$

$$\rightarrow \mathrm{C}_{n-1} + 2\frac{(-4)^n\cdot n!}{(2n+1)!}\mathrm{B}_{2n+1} = \mathrm{C}_{n-1} - \mathrm{C}_n = \frac{(-4)^n\cdot n!}{(2n+1)!}2e \quad (\ \cdots\cdots\ ①\ )$$

여기서 $\mathrm{C}_0 = -2\mathrm{B}_1$이며, C_n은 계차수열이므로 $\mathrm{C}_n = \mathrm{C}_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-4)^k\cdot k!}{(2k+1)!}(-2e)$이다. 따라서 0 이상

의 정수 n에 대하여 B_{2n+1}에 대한 식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\mathrm{B}_{2n+1} = \frac{(2n+1)!}{(-4)^n \cdot n! \cdot (-2)}\left(-2\mathrm{B}_1 - 2e\sum_{k=1}^{n}\frac{(-4)^k \cdot k!}{(2k+1)!}\right)$$
$$= \frac{(2n+1)!}{(-4)^n \cdot n!}\left(\mathrm{B}_1 - e + e\sum_{k=0}^{n}\frac{(-4)^k \cdot k!}{(2k+1)!}\right) \ (\ \cdots\cdots \ ② \ )$$

채점 기준

주어진 치환을 이용하여 C_n의 점화식을 구함. (①) ·· 15점

C_n의 점화식을 풀어 일반항을 구하고, 이를 이용하여 B_{2n+1}의 일반항을 구함. (②) ············ 10점

(이외에도 논리적으로 모순이 없을 시 모두 정답처리.)

②의 $\sum$ 부분에서 $k=1$이 $k=0$으로 바뀌었는데, 그 이유를 잘 생각해 보시길 바랍니다.

[논제 3]

[논제 3-1] $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n (n!)^2}{(2n+1)!}$ 임을 보이시오. [25점]

출제 의도 : 제시문을 활용하여 극한이 포함된 정적분을 무한급수로 나타낼 수 있다.

네, 이제부터 진짜로 고난이도 논제들이 마구 쏟아지게 됩니다. 쓰기도 벅차고 또 내용도 만만치 않아서 조금 애를 먹었으리라 생각합니다. 특히, 급수에서 시작점($k=0$ 또는 $k=1$)을 정확하게 써내야 정답으로 인정됩니다.

예시 답안 : 0 이상의 정수 n에 대해 [논제 2-1]에 의해

$$\mathrm{A}_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x\,dx = \frac{4^n \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \mathrm{A}_{2k+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x - \sin^3 x + \sin^5 x - \sin^7 x + \ \dots \ + (-1)^n \sin^{2n+1}x\right)dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \frac{1-(-\sin^2 x)^{n+1}}{1+\sin^2 x}dx = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-4)^k \cdot (k!)^2}{(2k+1)!}$$

이다. ($\cdots\cdots$ ①) 이때, 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 $0 < \sin x < 1 \ \rightarrow \ -1 < (-\sin^2 x)^{n+1} < 1$이므로 $\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\left|1-(-\sin^2 x)^{n+1}\right| < 2\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}$이다. 여기서 $\frac{\sin x}{1+\sin^2 x} = g(x)$은 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 연속 함수이며, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-(-\sin^2 x)^{n+1}}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{1+\sin^2 x} = f(x)$도 연속 함수이다. 또한, 제시문 (마)에 의해 정적분은 적분 구간의 양 끝에서 피적분 함수가 정의되지 않아도 극한을 이용하여 그 점에서 피적분 함수가 정의된 것처럼 그 값을 계산할 수 있다. 따라서 제시문 (바)에 의해 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \frac{1-(-\sin^2 x)^{n+1}}{1+\sin^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to\infty} \sin x \cdot \frac{1-(-\sin^2 x)^{n+1}}{1+\sin^2 x}dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin}{1+\sin^2 x}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n(n!)^2}{(2n+1)!} \quad (\ \cdots\cdots \ ② \ )$$

이때, 정적분 식에서 $\cos x = t$로 치환하면 다음과 같다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin}{1+\sin^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2-\cos^2 x}dx = \int_1^0 \frac{-1}{2-t^2}dt = \int_0^1 \frac{1}{2-x^2}dx$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{1}{2-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n(n!)^2}{(2n+1)!} \quad (\ \cdots\cdots \ ③ \ )$$

채점 기준
[논제 2-1]을 이용하여 ①의 식을 보임. ·· 10점
제시문을 이용하여 $|f(n,x)| \le g(x)$인 연속함수 $g(x)$를 구한 후, 식 ②를 유도함. ··· 10점
치환 적분을 이용하여 주어진 정적분과 무한급수가 같음을 보임. (③) ························ 5점

(이외에도 논리적 모순이 없을 시 모두 정답처리. 단, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \mathrm{A}_{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n \sin^{2n+1}x dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \sin^{2n+1}x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}dx$로 바로 계산한 경우는 ①, ② 모두 0점 처리.)

아마 이런 걸 어떻게 생각해내느냐고 묻는 분도 계실 텐데요..... 솔직히 문제의 $\frac{(-4)^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ 부분만 보아도 [논제 2-1]의 식을 이용해야 한다는 것을 알 수 있습니다. 일단, 형태가 같기 때문에 '아, 뭔가 계속 더해나가면 되는 꼴인가보다' 하는 것이지요.
여기서 ①, ②를 위 풀이처럼 풀지 않고 '단, ~' 안의 풀이로 푼 경우는 모두 0점 처리하였습니다. 왜냐하면, 원래 정적분에서 $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx$은 '유한개의 피적분 함수를 더하는 경우'에만 성립하며, 무한개의 피적분 함수를 더할 경우에는 위의 제시문 (바)처럼 조건을 따져야 합니다. 또한, $\frac{(-4)^n(n!)^2}{(2n+1)!}$의 경우도 계산기를 돌려보면 n이 무한대로 발산할 때 0으로 수렴하며, 적분판정법을 활용하면 그 급수가 수렴함을 보일 수 있습니다. 무엇보다도 이렇게 등호가 성립하니까 무조건 급수는 수렴해야지요.

[논제 3-2] $\int_1^e \frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx$를 [논제 2]의 B_{2n+1}에 대한 식으로 나타내시오. [15점]

출제 의도 : 부분 적분법을 활용하여 주어진 적분식을 수열로 표현할 수 있다.

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)

만약 [논제 3-1]을 해결하셨다면 같은 논리로 쉽게 해결할 수 있는 논제입니다. 물론, [논제 2]의 B_{2n+1}을 바로 사용해도 되고, 그냥 부분적분을 계속 사용한 후에 마지막에 나오는 식을 B_{2n+1}로 바꿔주는 것도 가능합니다.

예시 답안 : 부분 적분법에 의해 $\int_1^e \frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx = \left[x \cdot 2\sqrt{\ln x}\right]_1^e - \int_1^e 2\sqrt{\ln x}\,dx = 2e - 2\mathrm{B}_1$이다. 이때, [논제 2-3]에서 $\mathrm{B}_{2n+1} = \frac{(2n+1)!}{(-4)^n \cdot n!}\left(\mathrm{B}_1 - e + e\sum_{k=0}^{n}\frac{(-4)^k \cdot k!}{(2k+1)!}\right)$이므로 이를 변형하면 $2e - \mathrm{B}_1 = 2e\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-4)^k \cdot k!}{(2k+1)!}\right) - 2\frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n+1)!}\mathrm{B}_{2n+1}$이다.

$$\therefore \int_1^e \frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx = 2e\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-4)^k \cdot k!}{(2k+1)!}\right) - 2\frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n+1)!}\mathrm{B}_{2n+1}$$

채점 기준
 부분 적분법을 활용하여 주어진 정적분식을 수열로 표현함. ······································ 15점
(이외에도 논리적으로 모순이 없을 시 모두 정답처리.)

[논제 3-3] $0 < x < 1$인 임의의 x에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. [30점]

$$\sqrt{x}\,e^{-x+1} < -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} < 2 - x^2$$

출제 의도 : 함수의 미분과 적분(또는 증감)을 활용하여 주어진 x의 범위에서 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있다.

[논제 1]과 유형은 비슷하지만, 이 논제는 무려 2번 미분을 해야 합니다.

예시 답안 : 먼저 $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = \left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1)$이므로 $0 < x < 1$에서 항상 $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} < 0$ → $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} < 2 - x^2$이다. (…… ①)

함수 $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - \sqrt{x}\,e^{-x+1}$이라 하자. 즉, $0 < x < 1$에서 항상 $f(x) > 0$임을 보이면 된다. $f(x)$는 두 번 미분 가능하므로,

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{-x+1}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt{x}^3} - \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{-x+1} = \frac{-4x^2 + 4x + 1}{4\sqrt{x}^3}e^{-x+1}$$

이다. 이때, $0 < x < 1$에서 $-4x^2 + 4x > 0$이므로 $\frac{-4x^2 + 4x + 1}{4\sqrt{x}^3}e^{-x+1} > \frac{1}{4\sqrt{x}^3}e^{-x+1} > 0$에서 $f''(x) > 0$이다. (…… ②)

풀이 1) 즉, $f'(x)$는 증가함수이고, $\lim_{x\to 1-0} f'(x)=0$이므로 제시문 (나), (다)에 의해 $0<x<1$에서 $f'(x)<0$이다. 따라서 $f(x)$는 감소함수이고, $\lim_{x\to 1-0} f(x)=0$이므로 마찬가지로 제시문 (나), (다)에 의해 $0<x<1$에서 $f(x)>0$이다.

$$\therefore \sqrt{x}\,e^{-x+1}<-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

$$\therefore \sqrt{x}\,e^{-x+1}<-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}<2-x^2 \ \ (\ \cdots\cdots\ ③\text{-}1\ )$$

풀이 2) 제시문 (라)의 ⅱ)와 (마)에 의해 $0<x<1$인 x에 대하여 $\int_x^1 f''(t)dt=\lim_{a\to 1-0}\int_x^a f''(t)dt$ $=-f'(x)>0(\because \lim_{x\to 1-0} f'(x)=0)$이다. 따라서 $f'(x)<0$이며, 또 같은 논리로 제시문 (마)에 의해 $\int_x^1 f'(t)dt=\lim_{a\to 1-0}\int_x^a f'(t)dt=-f(x)<0 \ \to\ f(x)>0$이다.

$$\therefore \sqrt{x}\,e^{-x+1}<-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

$$\therefore \sqrt{x}\,e^{-x+1}<-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}<2-x^2 \ \ (\ \cdots\cdots\ ③\text{-}2\ )$$

채점 기준

$0<x<1$에서 항상 $-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}<2-x^2$임을 보임. (①) ·· 5점

함수 $f(x)$를 설정하고, 항상 $f''(x)>0$임을 보임. (②) ·· 10점

함수의 증가, 감소의 성질을 이용하여 주어진 부등식이 성립함을 보임. (③-1) ······················ 15점

정적분의 성질을 이용하여 주어진 부등식이 성립함을 보임. (③-2) ·· 15점

(이외에도 논리적으로 모순이 없을 시 모두 정답처리. 단, ③-1의 과정에서 $f(x)$나 $f'(x)$에 대하여 최댓값, 최솟값을 언급한 경우 3점 감점.)

함수 $f(x)$, $f'(x)$는 모두 개구간 $(0<x<1)$이며, 그 안에서 감소 혹은 증가하기 때문에 최댓값과 최솟값이 없습니다. 때문에 최댓값, 최솟값을 언급하면서 답안을 서술한 경우, 약간의 감점을 하였습니다.

[논제 3-4] 무한급수 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n n!}{(2n+1)!}$의 수렴 여부를 판정하고, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n (n!)^2}{(2n+1)!}$, $2(e-1)$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n n!}{(2n+1)!}$의 대소 관계를 판정하시오. [40점]

출제 의도 : 극한의 성질과 정적분의 성질을 이용하여 주어진 문제 상황을 해결할 수 있다.

네, 이제 마지막 고비이며, 이번 회차의 하이라이트입니다. 점수에서 알 수 있다시피 정말 쓸 것도 많고, 내용도 어려우며, 지금까지 [논제 1], [논제 2], [논제 3]에서 보인 모든 것들을 종합하여 답을

써야 합니다. 사실 이번 회차가 정말 제시문부터 해서 논제까지 엄청난 물량으로 압박한 이유가 마지막의 [논제 3-4]를 위해서입니다. 사실 적당히 5개 정도 주고 ‘이 정도는 알아서 해 봐’라는 식으로 냈다면 시험지는 간단했겠지만, 대신 난이도는 엄청났겠지요. 위에서 쓴 것들을 단계적으로 접근하도록 유도하지 않고 그냥 막 줬다면..... 어마어마한 참상이.....

예시 답안 : [논제 3-2]에 의하면 $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx = 2e\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-4)^k \cdot k!}{(2k+1)!}\right) - 2\frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n+1)!}\mathrm{B}_{2n+1}$이다. 그런데, $1<x<e$에서 $0<\ln x<1$이므로 자연수 n에 대하여 $\left|\sqrt{\ln x}^{\,n}\right|<1=g(x)$이고, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{\ln x}^{\,n}=0=f(x)$이므로 제시문 (바)에 의해 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^e \sqrt{\ln x}^{\,n}dx=\int_1^e \lim_{n\to\infty}\sqrt{\ln x}^{\,n}dx=0$이다. 따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mathrm{B}_n=\lim_{n\to\infty}\mathrm{B}_{2n+1}=0$이다. (…… ①) 또한, 제시문 (사)에 의하면 임의의 실수 a에 대해 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$라는 것은 적당히 큰 자연수 n과 임의의 실수 a에 대하여 $|a|^n \ll n!$이 성립한다는 것이다. 적당히 큰 자연수 n에 대하여 $\displaystyle 0<\left|\frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n+1)!}\right|<\frac{n!\cdot n!}{(2n+1)!}<\frac{(2n)!}{(2n+1)!}=\frac{1}{2n+1}$이므로 극한의 성질에 의해 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n+1)!}=0$이다. (…… ②) 따라서 다음 극한식이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_1^e \frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx+2\frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n+1)!}\mathrm{B}_{2n+1}\right\}=\int_1^e\frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx=2e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n+1)!}$$

이때, [논제 1-4]에 의해 $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx$가 수렴하므로 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n+1)!}$ 또한 수렴한다. (…… ③)

[논제 3-1]에 의해 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2-x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n (n!)^2}{(2n+1)!}$이다. 또, $\displaystyle\int_1^e\frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx$에서 $\ln x=t$로 치환하면 $\displaystyle\int_1^e\frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}e^x dx=2e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n+1)!}$이다. 이때, [논제 3-3]에 의하면 $0<x<1$에서 $0<\sqrt{x}\,e^{-x+1}<2-x^2$이므로 제시문 (라)의 성질 ⅱ)에 의해 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2-x^2}dx<\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}e^{x-1}dx<\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}e^x dx$이다. 따라서 [논제 1-4]를 이용하면 다음이 성립한다.

$$\int_0^1\frac{1}{2-x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n (n!)^2}{(2n+1)!}<\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}e^x dx=2e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n+1)!}<2(e-1)$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n (n!)^2}{(2n+1)!}<2e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n+1)!}<2(e-1)\ (\ \cdots\cdots\ ④\ )$$

채점 기준

주어진 조건과 제시문을 활용하여 수열 $\{\mathrm{B}_{2n+1}\}$이 0으로 수렴함을 보임. (①) ………………… 10점

주어진 조건과 제시문을 활용하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n+1)!}=0$임을 보임. (②) ……………………… 15점

①, ②, [논제 1-4]를 이용하여 주어진 급수가 수렴함을 보임. (③) ······································ 5점
[논제 3-3]의 부등식과 치환적분을 활용하여 두 급수와 $2(e-1)$의 대소 관계를 판정함.(④)··· 10점
(이외에도 논리적으로 모순이 없을 시 모두 정답처리.)

휴~ 이번 회차는 별로 잡담을 하지 않고 그냥 풀이만 쭉 써 내려갔는데도 벌써 11페이지나 되는군요.... 정말 많았습니다. 특히 [논제 3-4]가 잘 보이지도 않고, 또 제시문 (사)를 이해하지 못하면 바로 쓸 수 없게끔 논제가 구성되어 있어서 꽤나 난도 높은 논제였습니다. 머, 더 이상 쓸 말도 없고 해서 이번 회차는 이만 줄이도록 하겠습니다. 그럼 20000!

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)