2016학년도 논술 모의고사 2회 (수학) 해설 & 예시 답안

안녕하세요! 어김없이 돌아온 제작자입니다! ......어떠셨을지는 모르겠지만, 일단 죽이지만 말아주세요..... 그래봤자..... 반성 안 할 거에요....

이번 2회는 내년이면 다시 또 역사 속으로 파묻히는 일차변환에 대한 내용...을 가장한 이차곡선 문제였습니다. 내년에 없어지는 만큼 (일차변환만이 아니라 행렬 자체가 없어집니다.) 올해 출제될 가능성도 매우 높은 파트이기 때문에 어떤 대학에서든지 한번쯤은 나왔으면 하는 개인적인 바람도 없지 않아 있습니다.

일단 이번 논제를 통해 물어보고 싶은 건 산더미 같은데요.... 이번 논제에서는 제외했지만, 사실 이차곡선의 일반형도 물어볼까 했다가 너무 어렵고, 또 가뜩이나 쓸 것도 많은데 그것까지 더해지면 완전히 (주로 제작자가) 멘붕에 빠질까봐 넣지 않고, 주로 기본형만 논제로 삼았습니다. 실은 이것도 각각의 논제에 맞는 조건 찾느라고 고생 엄청 했어요...... (칭찬 부탁드림다.)

[논제 2], [논제 3]같은 경우 처음에는 조건을 잘못 구해서, 구한 조건을 가지고 이차곡선을 만들었더니, 글쎄 이놈의 지오제브라가 타원 조건을 입력하면 쌍곡선을 그려대질 않나, 쌍곡선 조건을 입력하면 공집합이 나와서 그래프도 안 그려대질 않나.... 원래는 [논제 4-1]에서는 ⅰ)과 ⅱ) 말고 'ⅲ) C' : 원점이 꼭짓점인 포물선'을 물어 봤는데 만족할 만한, 간단한 조건이 안 나오질 않나.... (물론 조건은 구했습니다. 하지만 굉장히 귀찮은 작업이므로 그냥 여러분들이 한번 구해 보시길 바랍니다.) 암튼 우여곡절이 많았던 2회차였습니다. 그 외에도 [논제 4]가 원래는 [논제 2]였다든지, 처음의 제한시간은 90분이었다든지, [논제 2], [논제 3]에서 해당하는 θ가 예각이 아니라 $0 \le \theta < 2\pi$였다든지.... (마지막꺼는 너무 어려워서 예각조건으로 바꾼 것입니다. '절대', '절대'로 제작자가 조건을 나눠서 $\tan\theta$나 $\tan 2\theta$를 구하기 귀찮아서 그런 건 아닙니다!!! ...아마도요...)

이번 회차에서도 계산 실수로 인한 감점은 1문제당 2점입니다. 그리고 이번 회차에서 중요한 내용인데, 모든 논제에서 회전변환에 대한 내용을 서술할 때, 회전변환의 중심을 명시하지 않은 경우에도 문제당 2점 감점입니다. 만약 [논제 1]에서 계산실수를 했고, 회전변환의 중심을 표시하지 않은 경우, 본인이 득점한 점수에서 4점을 빼야 합니다. 물론 본인 득점이 4점 이하인 경우에는 [논제 1]의 득점은 0점이 되겠지요.

또한 이번 회차는 '보이는 논제', 즉 증명 논제가 많은 관계로 예시 답안은 말 그대로 '예시 답안'에 불과합니다. 논리상 모순이 없거나 반례가 없는 과정(단, 순환논증이나 논제에서 제시한 결과를 가지고 증명하는 경우는 제외) 모두 정답이 될 수 있습니다. 다만, 최종적으로 나오는 결과는 '예시 답안'과 일치해야 합니다. (특히 [논제 4-1]의 조건들은 반드시 하나라도 빠뜨리거나 하는 일 없이 구해야 합니다. 제작자가 제시한 조건 이외의 조건(단, 수험자가 제시한 조건에서 제작자가 제시한 조건으로 유도가 가능한 경우는 정답 인정)은 모두 오답처리가 됩니다. (제가 제시하는 조건들은 충분한 시간을 들여서 찾아낸 조건이며, 이미 계산 프로그램으로 검증을 마친 상태입니다.)

그럼 2회 논제들의 출제의도와 예시답안, 채점기준을 공개하겠습니다.

p.s. 아, 그리고 지난번 1회차에서 잠깐 언급했던 어려운 두 문제에는 이번 회차가 포함되지 않았었는데, 아무래도 포함시켜야 할 듯합니다. 이번 2회차는 갑자기 떠오른 생각이라서 1회차 만들 당시에는 존재하지도 않았던 문제니까요.

[논제 1] 좌표평면상의 임의의 점 (x, y)를 원점을 중심으로 θ만큼 회전시키는 변환을 g라 하자. 변환 g가 일차변환임을 보이고, 변환 g에 대응되는 2×2 행렬 A를 구하시오. [10점]

출제 의도 : 일차변환의 정의를 이해하고, 회전변환이 일차변환임을 보일 수 있으며, 회전변환에 대응되는 행렬을 구할 수 있다.

수능을 응시하는 수학 B형 선택 수험생(2016학년도 수능입니다. 2017학년도 학생들은 상관없어요.)으로서 이걸 증명 못한다는 것은....... 정말 답이 없네요..... 아니, 해결하지 못한 사람들을 깔보는 게 아니라 진짜로 이걸 증명 못하면 일차변환을 헛배운 게 되는 거니까요. '당연히' 이 논술 모의고사를 보는 수험생들은 모두 [논제 1]을 해결했으리라 믿습니다. 완전 거저 주는 문제니까요. 다만, 그래서 채점 기준을 조금 까다롭게 했습니다. 날림 공사한 수험생들을 솎아내기 위한, 일종의 '함정'이지요.(잔인한 제작자...)

예시 답안 : 좌표평면상의 점 $P(x, y)$까지 거리를 r, 원점 O에 대해 $\overline{OP}$와 x축의 양의 방향이 제 1사분면 쪽으로 이루는 각을 α $(0 \le \alpha < 2\pi)$라 하면

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이다. 점 P를 원점을 중심으로 θ만큼 회전시킨 점을 P'이라 하면 $\overline{OP'}$와 x축의 양의 방향이 제 1사분면 쪽으로 이루는 각이 $\alpha+\theta$이고, $\overline{OP} = \overline{OP'}$이므로 변환 $g : P(x, y) \to P'(x', y')$에 의한 점 $P'(x', y')$의 좌표는

$$\begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\theta) \\ y' = r\sin(\alpha+\theta) \end{cases} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

이다. 그런데 $\cos(\alpha+\theta) = \cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta$, $\sin(\alpha+\theta) = \sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta$이므로 ㉡은 다음과 같다.

$$\begin{cases} x' = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \quad (\because \text{ by ㉠})$$

이때, α에 대해서는 θ는 상수이므로, 제시문 (가)에 의해 변환 g는 일차변환이다. (…… ①)
제시문 (가)에 따르면 변환 g는 $a = \cos\theta$, $b = -\sin\theta$, $c = \sin\theta$, $d = \cos\theta$이므로 변환 g에 대응하는 2×2 행렬 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$이다. (…… ②)

채점 기준
변환 g가 일차변환임을 보임. (①) ······························ 6점
변환 g에 대응하는 2×2 행렬 A를 구함. (②) ············ 4점
(이외에도 그림을 이용하여 논제를 해결하는 등 논리상 모순이 없을 경우 10점 득점. 단, g가 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$꼴임을 보인 후 g가 일차변환이라고 서술한 경우는 ①에서 점수 없음. 또한, 예시 답안처럼 작성할 때, r 미표기시 2점 감점. 단, 원점을 중심으로 확대, 축소해도 각은 보존됨을 설명한 경우에는 점수 인정.)

이야~ 점수가 팍팍 깎이는 소리가 들리는 것 같군요!(←악마 제작자)

[논제 2]

[논제 2-1] $m \ne 0$, $n > 0$인 임의의 상수 m, n에 대하여 곡선 $y = mx + \dfrac{n}{x}$가 원점이 중심이고,

x축을 중심축으로 하는 어떤 이차곡선을 원점을 중심으로 θ만큼 회전시킨 도형임을 보이고, $\tan\theta$를 m, n에 대한 식으로 나타내시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$) [15점]

출제 의도 : 회전 변환을 이용하여 x축을 중심축으로 하는 이차곡선을 원점을 중심으로 회전시켜 주어진 곡선이 되기 위한 각도의 관계식을 구할 수 있다.

하하핫! 여기서부터 헬게이트에 돌입합니다!(진정한 헬게이트는 따로 있습니다. 기대하시길....) 이 논제만 해결하면 나머지 논제는 모두 같은 논리로 해결할 수 있기 때문에 이 논제를 해결하지 못하면 나머지 6개의 논제는 해결하기 어렵겠지요! 한마디로 알면 풀고 모르면 못 푸는 문제!

예시 답안 : 곡선 $y=mx+\dfrac{n}{x}$을 원점을 중심으로 다시 $-\theta$만큼 회전시키면, x축을 중심축으로 하는, 원점을 중심으로 θ만큼 회전하기 전의 곡선 C가 나온다. $y=mx+\dfrac{n}{x}$위의 점을 (x',y'), 곡선 C위의 점을 (x,y)라 하면 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x\cos\theta-y\sin\theta \\ x\sin\theta+y\cos\theta \end{pmatrix}$이므로 이를 곡선 $y=mx+\dfrac{n}{x}$에 대입하여 정리하면[1] (배각 공식 사용.)

$$C:(\sin2\theta-m(\cos2\theta+1))x^2+(\cos2\theta+m\sin2\theta)xy-(\sin2\theta+m(-\cos2\theta+1))y^2=n$$

이다. 여기서, $\cos2\theta+m\sin2\theta=0$이므로 위 식에서 m을 소거하면 C는 다음과 같다.

$$C:\frac{1+\cos2\theta}{2n\sin2\theta}x^2-\frac{1-\cos2\theta}{2n\sin2\theta}y^2=1 \quad \cdots\cdots \text{ⓒ}$$

이때, $\dfrac{1+\cos2\theta}{2n\sin2\theta}>0$, $\dfrac{1-\cos2\theta}{2n\sin2\theta}>0$이며 ($\because$ $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, $\theta\neq\dfrac{\pi}{4}$ $(m=-\dfrac{\cos2\theta}{\sin2\theta}\neq0)$ $\rightarrow$ $\sin2\theta>0$, $-1<\cos2\theta<1$ $\rightarrow$ $1\pm\cos2\theta>0$, $n>0$), C는 두 양수 p, q에 대하여 $\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=1$꼴의 형태이므로 C는 원점이 중심이고, x축을 주축으로 하는 쌍곡선이다. (…… ①) 따라서 ⓒ을 원점을 중심으로 θ만큼 회전시키면 $\cos2\theta+m\sin2\theta=0$ $\rightarrow$ $\tan2\theta=-\dfrac{1}{m}$인 m에 대한 곡선 $y=mx+\dfrac{n}{x}$이 된다. (…… ②) 탄젠트의 배각공식에 의해 $\tan2\theta=-\dfrac{1}{m}=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$이고, $\tan\theta$에 대해 내림차순으로 정리하면 $\tan^2\theta-2m\tan\theta-1=0$이므로 $\tan\theta=m+\sqrt{m^2+1}$ ($\because$ $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ $\rightarrow$ $\tan\theta>0$)이다. (…… ③)

채점 기준

곡선 C위의 점을 원점을 중심으로 θ만큼 회전시키면 곡선 $y=mx+\dfrac{n}{x}$ 위의 점이 됨을 이용하여

[1] 여기서는 '대입 후 정리하여' 계산 결과만 제시했지만, 실제 시험에서는 일일이 다 서술하는 것이 좋습니다. 자신의 사고, 계산에 쓰인 논리 등을 보여줄 수 있기에 좋은 점수를 얻을 수 있으며, 계산 실수를 해서 계산한 결과가 달라도 채점자가 어느 정도 감안해서 점수를 줄 수 있기 때문입니다.('절대' 제작자가 귀찮아서 모든 연산과정을 보여드리지 못해서 죄송합니다...) 물론, 시간이 없어서 상술하는 시간이 부족할 경우에는 계산 결과만 제시해야겠지요. 계산 '과정'을 보여주느라 정작 '결론'을 서술하지 못하면 본말전도니까요. 계산 과정을 보여주는 건 어디까지나 시간적 여유가 있을 때만 하시길 바랍니다.

곡선 C를 θ, m, n에 대한 식으로 표현함으로써 주어진 곡선이 원점이 중심이고, x축을 중심축으로 하는 이차곡선임을 보임. (①) ·· 9점
①에서 구한 곡선 C(㉢)를 구하기 위한 θ와 m, n의 관계식을 구함. (②) ····················· 3점
$\tan\theta > 0$임을 이용하여 $\tan\theta$를 m, n에 대한 식으로 정확히 나타냄. (③) ····················· 3점
(이외에도 그래프를 이용하여 $y = mx + \dfrac{n}{x}$의 중심축과 x축이 이루는 예각을 θ로 둔 후 구한 경우도 정답처리. 단, 그래프를 이용하는 경우, 우선 대칭변환 등을 통해 $y = mx + \dfrac{n}{x}$이 $y = mx$와 y축($m > 0$인 경우), 혹은 $y = mx$와 x축($m < 0$인 경우)이 이루는 각의 이등분선에 대칭임을 보이고, 그 이등분선이 x축과 이루는 예각이 θ임을 이용해야 득점 가능. 그래프를 그리고, $y = (\tan\theta)x = (m + \sqrt{m^2+1})x$에 대해 대칭이라고만 서술한 경우 최대 3점 득점.)

이 논제는 ①만 구하고 나면 나머지는 자동적으로 (범위를 잘 고려하면) 구할 수 있는 것이라서 처음 ①의 배점을 가장 높게 했고, ②, ③의 배점을 비교적 낮게 잡았습니다. 물론 그래프를 이용한 해석도 가능하므로 그래프를 이용한 경우, $y = mx + \dfrac{n}{x}$이 $y = mx$와 y축($m > 0$인 경우), 혹은 $y = mx$와 x축($m < 0$인 경우)이 이루는 각의 이등분선에 대칭임을 보인 후 $\tan\theta$를 구한 경우도 정답처리 하였습니다. (근데 이 방법은 대칭변환 때문에 계산이 너무 지저분해질 겁니다...)
그리고, 위의 조건에서 $m = -\dfrac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} \neq 0$이라 했으므로, $\theta \neq \dfrac{\pi}{4}$임을 유의해야 합니다. (물론, $m = -\dfrac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} \neq 0$을 서술하면 문제없습니다.)
①에서 쌍곡선의 방정식을 구한 것은 주어진 곡선이 원점이 중심이고, x축을 중심축으로 하는 이차곡선을 회전시킨 곡선임을 보이는 것도 문제에 포함되어 있으므로(①, ②) 곡선 C가 원점이 중심이고, x축을 중심축으로 하는 이차곡선임도 보여야 하기 때문입니다. 만약 곡선 C가 x축을 중심축으로 하는 이차곡선임을 보이지 않고 $\tan\theta$만 구할 경우 9점 감점(① 득점 없음)하면 됩니다.

[논제 2-2] $n \neq 0$인 임의의 상수 m, n에 대하여 곡선 $y = mx + \dfrac{n}{x}$은 어떤 종류의 이차곡선인지 논하시오. [10점]

출제 의도 : 회전변환을 이용해 곡선 $y = mx + \dfrac{n}{x}$이 쌍곡선임을 설명할 수 있다.

이 논제는 [논제 2-1]을 제 의도대로 해결했을 경우 비교적 손쉽게 해결할 수 있습니다. 과장하자면 거의 쉬어가기 코너라고 해도 될 정도입니다. 그래서 배점이 비교적 낮은 것이지요.

예시 답안 : 곡선 $y = mx + \dfrac{n}{x}$을 원점을 중심으로 $-\theta$만큼 회전시킨 곡선은 원점이 중심이고, x축, 혹은 y축을 중심축으로 하는 곡선이며, 그 방정식은 [논제 2-1]의 ㉢과 같다. (단, $0 < \theta < \pi$) 이때 ㉢을 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다. 이때, $\cos 2\theta + m\sin 2\theta = 0$에서

$\sin 2\theta = 0$이면 $\cos 2\theta = 0$인데, $\sin 2\theta = \cos 2\theta = 0$인 θ는 존재하지 않으므로 $\sin 2\theta \neq 0$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$이다. ($m=0$이면 $\cos 2\theta = 0$이고, $\sin 2\theta \neq 0$이므로 아래의 1) 혹은 2)의 경우에 포함된다.) 또한, $\theta \neq 0$, $\frac{\pi}{2}$, π이므로 $-1 < \cos 2\theta < 1 \rightarrow 1 \pm \cos 2\theta > 0$이다. (…… ①)

1) $2n\sin 2\theta > 0$인 경우

$\frac{1+\cos 2\theta}{2n\sin 2\theta} = \frac{1}{p}$, $\frac{1-\cos 2\theta}{2n\sin 2\theta} = \frac{1}{q}$라 하면 $p>0$, $q>0$이므로 $C: \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 1$이 되어 원점이 중심이고, x축이 주축인 쌍곡선이다.

2) $2n\sin 2\theta < 0$인 경우

$\frac{1+\cos 2\theta}{2n\sin 2\theta} = \frac{1}{p}$, $\frac{1-\cos 2\theta}{2n\sin 2\theta} = \frac{1}{q}$라 하면 $-p>0$, $-q>0$이므로 $C: \frac{x^2}{-p} - \frac{y^2}{-q} = -1$이 되어 원점이 중심이고, y축이 주축인 쌍곡선이다. (…… ②)

따라서 1), 2)와 제시문 (다)의 마지막 문장에 의해 $n \neq 0$인 임의의 상수 m, n에 대하여 곡선 $y = mx + \frac{n}{x}$은 쌍곡선이다. (…… ③)

채점 기준

곡선 C의 방정식을 두 가지 경우로 나눌 수 있음을 보이고, ①을 적절하게 서술함. ………… 2점

경우를 나누는 기준을 $2n\sin 2\theta$의 부호로 정하고, 각각의 경우에서 곡선 C가 쌍곡선임을 보임. (②) ……………… 2점

곡선 $y = mx + \frac{n}{x}$가 쌍곡선임을 설명함. (③) ……………… 1점

(이외의 논리적 모순이 없는 경우 5점 모두 득점.)

예시 답안의 경우는 회전변환한 곡선 C의 중심축이 x축과 y축인 경우로 두 가지가 되었는데, 사실 y축이 주축인 쌍곡선도 주축이 x축인 쌍곡선을 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전시킨 것에 해당하므로, 중심축이 y축인 곡선 C는 중심축이 x축인 곡선을 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전시킨 곡선임을 설명한 후에는 중심축이 x축인 경우만 고려해도 옳은 설명입니다. (물론, 이런 성질은 모든 이차곡선에 해당하는 성질이지요. 때문에 앞으로의 논제에서도 같은 논리를 이용하여 중심축이 x축인 경우만 고려해도 옳은 논리이므로 정답으로 인정합니다.)

[논제 3]

[논제 3-1] $a \neq c$인 임의의 세 양수 a, b, c에 대하여 $ax^2 - bxy + cy^2 = 1$은 원점이 중심이고, x축을 중심축으로 하는 어떤 이차곡선을 원점을 중심으로 θ만큼 회전시킨 곡선임을 보이고, $\tan 2\theta$를 a, b, c에 대한 식으로 나타내시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $b^2 - 4ac < 0$) [15점]

출제 의도 : 회전 변환을 이용하여 x축을 중심축으로 하는 이차곡선을 원점을 중심으로 회전시켜 주어진 곡선이 되기 위한 각도의 관계식을 구할 수 있다.

곡선 C가 타원임을 보이기 위한 조건은 많이 까다로웠던 것을 빼면 [논제 2-1]이랑 완전히 똑같은 문제라서 다들 잘 해결하셨으리라 믿습니다.

예시 답안 : [논제 2-1]에서와 같은 논리로 곡선 $ax^2-bxy+cy^2=1$위의 점 (x', y')은 원래의 곡선 C 위의 점 (x, y)에 대해 $x'=x\cos\theta-y\sin\theta$, $y'=x\sin\theta+y\cos\theta$이다. 이를 곡선의 방정식에 대입하여 정리하면 다음과 같다. (배각 공식 사용.)

$$C:(a\cos^2\theta-b\cos\theta\sin\theta+c\sin^2\theta)x^2+((c-a)\sin2\theta-b\cos2\theta)xy$$
$$+(a\sin^2\theta+b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta)y^2=1 \quad (\cdots\cdots ①)$$

여기서, $(c-a)\sin2\theta-b\cos2\theta=0$이므로 정리하면 곡선 C는 다음과 같다.

$$C:\left(a\left(\cos\theta-\frac{b}{2a}\sin\theta\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}\sin^2\theta\right)x^2$$
$$+\left(a\left(\sin\theta+\frac{b}{2a}\cos\theta\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}\cos^2\theta\right)y^2=1 \quad \cdots\cdots ㉣$$

이때, $b^2-4ac<0$이고, a, b, c는 모두 양수이므로 C는 두 양수 p, q에 대하여 $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=1$꼴의 형태이다. 또한, $a\cos^2\theta-b\cos\theta\sin\theta+c\sin^2\theta=\frac{a+c}{2}+\frac{a-c}{2}\cos2\theta-\frac{b}{2}\sin2\theta=\frac{a+c}{2}-\frac{b}{2}\frac{1}{\sin2\theta}$, $a\sin^2\theta-b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta=\frac{a+c}{2}+\frac{c-a}{2}\cos2\theta+\frac{b}{2}\sin2\theta=\frac{a+c}{2}+\frac{b}{2}\frac{1}{\sin2\theta}$ 이므로($\because$ 배각 공식, $(c-a)\sin2\theta-b\cos2\theta=0$) $0<\frac{1}{p}<\frac{1}{q}$ $\rightarrow$ $p>q>0$에서 C는 원점이 중심이고, x축을 장축으로 하는 타원이다. ($\cdots\cdots$ ②) 따라서, ㉣을 원점을 중심으로 θ만큼 회전시키면 $(c-a)\sin2\theta-b\cos2\theta=0$인 a, b, c에 대한 곡선 $ax^2-bxy+cy^2=1$이다. 이때, $(c-a)\sin2\theta-b\cos2\theta=0$에서 $a\neq c$, $b>0$이므로, $\cos2\theta\neq0$이다.(만약 $\cos2\theta=0$이면 $\sin2\theta=0$이므로 $\cos2\theta=\sin2\theta=0$인 θ는 존재하지 않는다.) $\therefore \tan2\theta=\frac{b}{c-a}$ ($\cdots\cdots$ ③)

채점 기준

곡선 C위의 점을 원점을 중심으로 θ만큼 회전시키면 곡선 $ax^2-bxy+cy^2=1$ 위의 점이 됨을 이용하여 곡선 C를 θ, a, b에 대한 식으로 표현함.(①) ································ 7점

①에서 곡선 C의 x^2의 계수와 y^2의 계수의 대소와 부호를 밝혀 곡선 C가 원점이 중심이고, x축을 중심축으로 하는 이차곡선임을 보임. (②) ································ 5점

①에서 구한 곡선 C(㉣)을 구하기 위한 θ와 a, b의 관계식을 이용해 $\tan2\theta$를 구함.(③) ······ 3점

(이외에도 논리적으로 서술했을 시 15점 모두 득점.)

다른 건 잘 해결했을지 몰라도 아마 ②가 제일 어려웠을 겁니다. 저도 이 해설지를 작성하면서 막 다시 증명하였으니까요. 하지만, 조건에 $b^2-4ac<0$이 있고, x^2의 계수와 y^2의 계수가 $ap^2\pm bpq+cq^2$꼴의 형태이니까, 조금이라도 눈치가 빠른 사람은 완전제곱 꼴로 변형하면 곡선 C가 원점이 중심이고, x축이 장축인 타원일 조건을 구할 수 있을 거라 직감했을 겁니다.

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)

[논제 3-2] 임의의 세 양수 m, n, k에 대하여 $y = mx + \sqrt{n - kx^2}$ 와 $y = mx - \sqrt{n - kx^2}$ 로 이루어진 곡선은 원점이 중심이고, x축을 중심으로 하는 어떤 이차곡선을 원점을 중심으로 θ만큼 회전시킨 곡선임을 보이고, $\tan 2\theta$를 m, n, k에 대한 식으로 나타내시오. (단, $m^2 + k \neq 1$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [10점]

출제 의도 : 회전 변환을 이용하여 x축을 중심축으로 하는 이차곡선을 원점을 중심으로 회전시켜 주어진 곡선이 되기 위한 각도의 관계식을 구할 수 있다.

이번 논제 또한 [논제 3-1]을 해결했다면 바로 풀 수 있을 겁니다. 그것도 답안지, 시간을 엄청나게 절약하면서 말이죠.

예시 답안 : 주어진 곡선은 $y - mx = \sqrt{n - kx^2}$, $y - mx = -\sqrt{n - kx^2}$ 이므로 두 식을 각각 제곱하면 $y^2 - 2mxy + m^2x^2 = n - kx^2 \rightarrow \frac{m^2 + k}{n}x^2 - \frac{2m}{n}xy + \frac{1}{n}y^2 = 1(\because n > 0)$이다. (…… ①) 이때, [논제 3-1]에 의하면 $a \neq c$인 임의의 세 양수 a, b, c에 대하여 $ax^2 - bxy + cy^2 = 1$은 원점이 중심이고, x축이 장축인 타원을 원점을 중심으로 θ만큼 회전시켰을 때, $(c - a)\sin 2\theta - b\cos 2\theta = 0$인 a, b, c에 대한 곡선(타원)이 된다. $\frac{m^2 + k}{n} = a$, $\frac{2m}{n} = b$, $\frac{1}{n} = c$라 하면 $m^2 + k \neq 1$이고, $\frac{m^2 + k}{n} > 0$, $\frac{2m}{n} > 0$, $\frac{1}{n} > 0$이므로, $\frac{m^2 + k}{n}x^2 - \frac{2m}{n}xy + \frac{1}{n}y^2 = 1$는 원점이 중심이고, x축이 장축인 타원을 원점을 중심으로 θ만큼 회전시킨 도형이다. $\therefore \tan 2\theta = \frac{2m}{1 - (m^2 + k)}$이다.(…… ②)

채점 기준
주어진 곡선을 제곱하여 x^2, xy, y^2에 대한 식으로 바꿈. (①) …………………………………… 3점
①에서 구한 곡선이 원점이 중심이고, x축이 장축인 타원을 원점을 중심으로 θ만큼 회전시킨 곡선임을 보이고, $\tan 2\theta$의 값을 구함. (②) ……………………………………………………………………
2점
(이외에도 논리적으로 서술한 경우 모두 5점 득점.)

이 논제의 경우는 [논제 3-1]을 적용하는 문제인지라 배점을 그렇게 크게 두지 않았습니다. 그리고 이번 논제에서도 역시 그림을 이용하여 해결한 경우에도 논리적으로 문제가 없을 시에는 최고 15점을 받을 수 있습니다. 하지만, [논제 2]의 곡선과 달리, 이번 논제의 곡선의 장축의 방정식을 구하기는 상당히 힘들 것입니다. $y = mx$ 위쪽으로 지나는 직선이긴 하지만, [논제 2]에서의 곡선과 달리 $y = mx$와 y축이 이루는 예각을 이등분하는 직선이 주어진 타원의 장축이 되지 않기 때문입니다.

[논제 3-3] $n > 0$, $k > 0$이고 $m^2 + k \neq 1$인 임의의 세 상수 m, n, k에 대하여 곡선 $y = mx + \sqrt{n - kx^2}$ 와 $y = mx - \sqrt{n - kx^2}$ 로 이루어진 곡선은 어떤 종류의 이차곡선인지 논하시오. [10점]

출제 의도 : 회전 변환을 이용하여 곡선 $y = mx + \sqrt{n - kx^2}$ 와 $y = mx - \sqrt{n - kx^2}$ 로 이루어진 곡선이 타원임을 설명할 수 있다.

[논제 2-2]와 서술 방향은 기본적으로 동일합니다. 다만, 직접적으로 주어진 곡선을 회전시키면 식이 너무 복잡하므로 이번 논제에서는 $m < 0$인 경우에는, [논제 3-1]의 곡선을 먼저 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전시킨 후에 나온 방정식을 이용하였습니다.

예시 답안 : m의 부호에 따라 두 가지 경우로 나누어 생각해 볼 수 있다.
1) $m > 0$인 경우
[논제 3-2]에 의해 주어진 곡선은 원점을 중심으로 하는 타원이다.
2) $m < 0$인 경우
[논제 3-1]의 곡선 $ax^2 - bxy + cy^2 = 1$을 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전시키면 옮겨진 곡선 위의 점 (x', y')은 곡선 $ax^2 - bxy + cy^2 = 1$위의 점 (x, y)에 대하여 $x' = -y$, $y' = x$이므로, 이를 대입하여 정리하면 $ay^2 - (-b)xy + cx^2 = 1$이다. 즉, 새로운 두 양수 $a' \neq c'$와 음수 b'에 대하여 $a'x^2 - b'xy + c'y^2 = 1$으로 표현되는 곡선은 제시문 (다)의 마지막 부분에 의해 원점을 중심으로 하는 타원이다. 이때, 곡선 $y - mx = \sqrt{n - kx^2}$, $y - mx = -\sqrt{n - kx^2}$ 을 각각 제곱하면 두 식 모두 $y^2 - 2mxy + m^2x^2 = n - kx^2$이므로 $\frac{m^2 + k}{n}x^2 - \frac{2m}{n}xy + \frac{1}{n}y^2 = 1 (\because n > 0)$이다. 이때, $m < 0$이므로, $\frac{m^2 + k}{n} = a'$, $\frac{2m}{n} = b'$, $\frac{1}{n} = c'$라 하면 $m^2 + k \neq 1$이고, $\frac{m^2 + k}{n} > 0$, $\frac{2m}{n} < 0$, $\frac{1}{n} > 0$이므로, $\frac{m^2 + k}{n}x^2 - \frac{2m}{n}xy + \frac{1}{n}y^2 = 1$는 원점이 중심인 타원이다. (…… ①)
따라서 1), 2)와 제시문 (다)의 마지막 문장에 의해 $n > 0$, $k > 0$이고 $m^2 + k \neq 1$인 임의의 세 상수 m, n, k에 대하여 곡선 $y = mx + \sqrt{n - kx^2}$ 와 $y = mx - \sqrt{n - kx^2}$ 로 이루어진 곡선은 타원이다. (…… ②)

채점 기준
경우를 나누는 기준을 적절하게 세우고, 각각의 경우에서 주어진 곡선이 원점이 중심인 타원임을 보임. (①) ……………………………………………… 3점
곡선 $y = mx + \sqrt{n - kx^2}$ 와 $y = mx - \sqrt{n - kx^2}$ 로 이루어진 곡선은 타원임을 보임. (②) …… 2점
(이외에도 논리적으로 문제가 없을 시 5점 모두 득점.)

물론, [논제 2-2]도 이처럼 서술하면 쉽겠지만, $y = mx + \frac{n}{x}$를 회전시킨 후 $y = f(x)$꼴로 정리한 곡선은..... 정말 끔찍합니다.... (뭐, 꼭 $y = f(x)$꼴로 정리하지 않고 그냥 $x = g(y)$꼴의 함수로 생각하고 해결해도 됩니다만, 아무래도 우리에게 익숙한 함수의 형태는 $y = f(x)$꼴이기 때문에 이 방법은 해설지에 올리지 않았습니다. 저는 $x = g(y)$꼴의 함수도 많이 익숙하기에 쉽게 해결했지만요.)

[논제 4]

[논제 4-1] 제시문 (다)에 주어진 곡선 C'가 다음의 이차곡선이도록 하는 상수 a, b, c, d, e, f의 조건을 구하시오. [25점]

ⅰ) C' : 원점이 중심인 타원(원도 포함)
ⅱ) C' : 원점이 중심인 쌍곡선

출제 의도 : 회전 변환을 이용하여 특정한 이차곡선이 되기 위한 상수 a, b, c, d, e, f의 조건을 구할 수 있다.

처음에는 이 논제를 먼저 해결한 후 지금의 [논제 2]와 [논제 3]을 실제로 적용해보는 형태로 논술을 구상했지만, 이 조건을 찾는 게 상당히 빡세더군요. 계속 찾고 찾아도 새로운 조건이 보이고.... 결국은 필요한 최소한의 조건을 전부 찾았지만 말이죠.

예시 답안 : 어떤 곡선 C 위의 점 (x, y)를 원점을 중심으로 θ만큼 회전하여 곡선 C' 위의 점 (x', y')으로 옮길 때, x, y를 θ, x', y'에 표현하면, 이는 점 (x', y')를 원점을 중심으로 $-\theta$만큼 회전하여 점 (x, y)으로 옮긴 것과 같으므로 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = x'\cos\theta + y'\sin\theta \\ y = -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases} \quad \cdots\cdots \text{㉤} \ (\ \cdots\cdots \text{①}\ )$$

이때, 점 (x', y')은 제시문 (다)의 곡선 C'위의 점이고, 점 (x, y)은 원점이 중심이고, x축 혹은 y축이 중심축인 이차곡선 C 위의 점으로 볼 수 있다.

ⅰ) C' : 원점이 중심인 타원(원도 포함)

Ⓐ 두 양수 p, q에 대해 원점이 중심인 임의의 타원 $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1$을 원점을 중심으로 θ(단, θ는 임의의 실수)만큼 회전시키면 회전 후의 곡선도 원점이 중심인 타원이 된다. ($\because$ 제시문 (다)) ㉤에서 구한 $x = x'\cos\theta + y'\sin\theta$, $y = -x'\sin\theta + y'\cos\theta$을 대입하여 정리하면

$$C' : \left(\frac{\cos^2\theta}{p} + \frac{\sin^2\theta}{q}\right)x^2 + 2xy\sin\theta\cos\theta\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + \left(\frac{\sin^2\theta}{p} + \frac{\cos^2\theta}{q}\right)y^2 = 1 \ (\ \cdots\cdots \text{②}\ )$$

이다. 이 곡선은 제시문 (다)의 $C' : ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$과 일치하는 곡선이므로 $d = e = 0$이다. 또, $f \neq 0$이어야 하며, $-\frac{a}{f}x^2 - \frac{b}{f}xy - \frac{c}{f}y^2 = 1$에서 $-\frac{a}{f} = \frac{\cos^2\theta}{p} + \frac{\sin^2\theta}{q} > 0$, $-\frac{c}{f} = \frac{\sin^2\theta}{p} + \frac{\cos^2\theta}{q} > 0$이다.

또한, $\left(-\frac{b}{f}\right)^2 = \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} - \frac{2}{pq}\right)\sin^2 2\theta$, $\quad 4\frac{a}{f}\frac{c}{f} = 4\left(\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{p} + \frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{q} + \frac{\cos^4\theta + \sin^4\theta}{pq}\right)$

$= \frac{\sin^2 2\theta}{p^2} + \frac{\sin^2 2\theta}{q^2} + 4\frac{\cos^4\theta + \sin^4\theta}{pq}$이므로, $\frac{b^2 - 4ac}{f^2} = -4\frac{\cos^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^4\theta}{pq} = -\frac{4}{pq} < 0$에서 $b^2 - 4ac < 0$이 항상 성립한다. 이때, $a = c$이고, $b = 0$인 경우 C'은 원이 된다. ($\cdots\cdots$ ③)

Ⓑ [논제 3]을 참고해 보면 0이 아닌 임의의 두 상수 c, f와 임의의 상수 a, b, d, e에 대하여 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$을 y에 대한 이차방정식으로 보고 $y = f(x)$꼴의 형태로 풀은 식이 [논제 3-3]의 형태이면 C'는 원점이 중심인 타원이 된다. 근의 공식을 사용하면 다음과 같이 정리

된다.

$$y=\frac{-bx-e\pm\sqrt{(bx-e)^2-4acx^2-4dcx-4cf}}{2c} \quad \cdots\cdots\cdots \text{ㅂ} \ (\ \cdots\cdots \text{②} \ )$$

이때, $c<0$인 경우 복부호의 순서만 바꿔 주고, $b\rightarrow -b$, $2c\rightarrow -2c$로 바꿔준 후 다음과 같은 계산 과정을 거친다.

$c>0$인 경우, ㅂ을 정리하면 $y=-\frac{b}{2c}x\pm\frac{\sqrt{(b^2-4ac)x^2-(2be+4dc)x-4cf+e^2}}{2c}-\frac{e}{2c}$이고, 이 식이 [논제 3-3]에서 주어진 식과 동치가 되려면 $e=0$, $2be+4dc=0$이어야 한다. 이때, $c>0$이므로 $e=d=0$이다. 따라서 ㅂ은 다음과 같다.

$$y=-\frac{b}{2c}x\pm\frac{\sqrt{(b^2-4ac)x^2-4cf}}{2c}=-\frac{b}{2c}x\pm\sqrt{\frac{(b^2-4ac)}{4c^2}x^2-\frac{f}{c}}$$

$-\frac{b}{2c}=m$, $\frac{b^2-4ac}{4c^2}=-k$, $-\frac{f}{c}=n$이라 하면 $k>0$, $n>0$인 경우 주어진 곡선은 원점이 중심인 타원이다. 따라서 $b^2-4ac<0$, $\frac{c}{f}<0$이고, $0\le b^2<4ac$에서 $\frac{a}{f}<0$임을 알 수 있다. 만약 $k<0$, $n>0$이라 하면, $y=mx\pm\sqrt{n-kx^2}$에서 모든 실수 x에 대하여 $n-kx^2>0$이므로 $y=mx\pm\sqrt{n-kx^2}$의 정의역이 모든 실수가 되어 타원이 되지 않는다.($\because$ 타원의 정의역은 상수 $a<b$에 대해 $a\le x\le b$꼴이기 때문) 또한 $k>0$, $n<0$인 경우 모든 실수 x에 대해 $n-kx^2<0$이므로 $y=mx\pm\sqrt{n-kx^2}$은 공집합이 되며, $k<0$, $n<0$인 경우 정의역이 상수 $a<b$에 대해 $x\le a$ 또는 $b\le x$이기 때문에 이 역시 타원이 되지 않는다. 이때, $m=0$, $k=1$, 즉,$m^2+k=1$에서 $a=c$, $b=0$이 되면 C'은 원이 된다.($\cdots\cdots$ ③)

ⅱ) C' : 원점이 중심인 쌍곡선

ⅰ)에서와 같은 논리로 $pq>0$인 두 상수 p, q에 대해 원점이 중심인 임의의 쌍곡선 $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=1$을 원점을 중심으로 θ만큼 회전시킨 곡선도 원점이 중심인 쌍곡선이 된다. ($\because$ 제시문 (다)) ㅁ에서 구한 $x=x'\cos\theta+y'\sin\theta$, $y=-x'\sin\theta+y'\cos\theta$을 대입하여 정리하면

$$C':\left(\frac{\cos^2\theta}{p}-\frac{\sin^2\theta}{q}\right)x^2+2xy\sin\theta\cos\theta\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)+\left(\frac{\sin^2\theta}{p}-\frac{\cos^2\theta}{q}\right)y^2=1 \quad (\ \cdots\cdots \text{④} \ )$$

이다. 이 곡선은 제시문 (다)의 $C':ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$과 일치하는 곡선이므로 $d=e=0$이다. $f\ne0$, $-\frac{a}{f}x^2-\frac{b}{f}xy-\frac{c}{f}y^2=1$에서 $-\frac{a}{f}=\frac{\cos^2\theta}{p}-\frac{\sin^2\theta}{q}$, $-\frac{c}{f}=\frac{\sin^2\theta}{p}-\frac{\cos^2\theta}{q}$이다. ⅰ)에서와 같은 논리로 $\left(\frac{b}{f}\right)^2=\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{2}{pq}\right)\sin^2 2\theta$, $4\frac{a}{f}\frac{c}{f}=4\left(\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{p}+\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{q}-\frac{\cos^4\theta+\sin^4\theta}{pq}\right)$이므로, $\frac{b^2-4ac}{f^2}=4\frac{\cos^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+\sin^4\theta}{pq}=\frac{4}{pq}>0$에서 $b^2-4ac>0$이다. ($\cdots\cdots$ ⑤)

채점 기준

곡선 C 위의 점 (x, y)과 회전변환한 곡선 C' 위의 점 (x', y') 사이 관계식을 구함. (①) $\cdots$ 2점

ⅰ)의 조건 구하기.

Ⓐ - 직교 좌표축이 장축인 타원 $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=1$을 θ만큼 회전시킨 C'의 방정식을 구함. (②) … 3점
- ②에서 구한 곡선의 방정식의 계수와 제시문 (다)의 곡선의 방정식의 계수간의 비교를 통해 항상 성립하는 관계식 ($d=e=0$, $\dfrac{a}{f}<0$, $\dfrac{c}{f}<0$, $b^2-4ac<0$)을 구함. (③) …………… 8점

Ⓑ - 제시문 (다)의 곡선을 $y=f(x)$꼴의 식으로 구한 것이 [논제 3-3]의 곡선이면 됨을 파악하고, y에 대한 이차방정식을 풀음. (②) …………………………… 5점
- [논제 3]의 곡선의 계수와 ②에서 구한 곡선의 계수의 비교를 통해 항상 성립하는 관계식 ($d=e=0$, $\dfrac{a}{f}<0$, $\dfrac{c}{f}<0$, $b^2-4ac<0$)을 구함. (단, $k>0$, $n>0$인 경우만 타원이 됨을 서술해야 6점 득점. 이를 서술하지 않으면 2점만 득점.) (③) …………………… 6점

ⅱ)의 조건 구하기.

직교 좌표축이 주축인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=1$을 θ만큼 회전시킨 C'의 방정식을 구함. (④) …… 4점

제시문 (다)의 곡선의 방정식과의 계수 비교를 통해 항상 성립하는 관계식 ($d=e=0$, $b^2-4ac>0$)을 구함. (⑤) …………………… 8점

(이외에도 논리적으로 문제가 없을 시 25점 모두 득점. 단, ⅰ)의 서술 과정에서 C'가 원일 조건을 미서술 시 1점 감점.)

이번 논제의 경우에는 두 가지 경우의 증명이 가능하기 때문에 Ⓐ, Ⓑ로 나누어서 두 경우를 모두 보였습니다. 이때, 두 과정에서 각각 ②에 해당하는 내용을 찾는 난이도를 기준으로 배점을 달리 했습니다. 하지만, 어느 과정을 거치던 간에 ⅰ)을 보이면 무조건 얻는 점수는 11점으로 동일합니다. 눈치가 빠른 몇몇 분들은 아마 [논제 3-1]에서 제시한 조건 중 $b^2-4ac<0$을 참고하여 Ⓐ를 떠올리는 데 도움을 받았을 겁니다.

여기서 왜 회전한 후에 계수들에 나타난 삼각함수를 이용해서 곡선 C'가 각각의 이차곡선일 조건을 찾았는지 한번 고찰해 봅시다. θ는 임의의 실수이므로, 어떠한 θ에 대해서도 항상 성립하면 각각 [논제 2]와 [논제 3]에서 구한, 원점을 중심으로 $-\theta$만큼 회전했을 때, xy의 계수가 0이 되는 θ를 항상 찾을 수 있게 됩니다. 이는, 곡선 C'를 원점을 중심으로 $-\theta$만큼 회전시킨 곡선이 원점을 중심으로 하고, x축 혹은 y축을 중심축으로 하는 이차곡선이 될 수 있음을 뜻하며, 제시문 (다), 즉 회전변환의 성질에 의해 회전변환 이전과 이후의 도형은 서로 합동이므로 C'또한 원점을 중심으로 하는 이차곡선이 될 수 있음을 뜻하기 때문입니다. 다시 말하자면, 곡선 C'를 원점을 중심으로 $-\theta$만큼 회전시킨 곡선이 원점을 중심으로 하고, x축 혹은 y축을 장축 혹은 주축으로 하는 타원 혹은 쌍곡선이 되는 θ가 존재하도록 상수 a, b, c, d, e, f의 조건을 정하면, 곡선 C'는 원점이 중심인 타원 혹은 쌍곡선이 되기 때문에, 곡선 C를 회전변환한 후에 계수들에 나타난 삼각함수를 이용해서 곡선 C'가 각각의 이차곡선일 조건을 찾은 것입니다.

추가로 C'가 원점이 꼭짓점인 포물선일 상수 a, b, c, d, e, f의 조건은 $b^2-4ac=0$, $a^2+c^2>0$, $d^2+e^2>0$, $f=0$, $2ec+bd=0$, $2ad+eb=0$입니다.(이 조건에는 $a=b=e=0$ 혹은 $b=c=d=0$인 조건이 포함됩니다.) 매우 복잡하고도 까다로운 조건 때문에 제작자는 귀찮아서 이 조건의 유도 과정을 여러분에게 떠넘기도록 하겠습니다.(팁을 드리자면, 포물선의 기본형을 원점을 중심으로 회전이동한 후 계수들에 나타나는 삼각함수들을 이용해 항상 성립하는 조건들을 찾으면 됩니다.) 만약 이 조건으로도 성립하지 않는 포물선이 있거나,(geogebra.org로 가셔서 직접 수식을 써보고, 그려지는 곡선이 (지오제브라가 판단하길) 포물선인지 확인해 보시길 바랍니다.) 이 조건들로

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)

부터 유도할 수 없는 조건이 있을 경우 제작자의 이메일(exito2016@daum.net)로 제보해 주세요!

참고로, 상수 a와 b가 둘 다 0이 아닌 경우에는 $a^2+b^2>0$로 서술하는 것이 더 간단하고 말로 설명하는 것보다 한눈에 들어오므로 알기 쉽습니다. 마찬가지로 a, b의 부호가 서로 같으면 $ab>0$, 서로 부호가 다르면 $ab<0$이며, 만약 a, b 둘 다 양수이면 $ab>0$, $a+b>0$으로, a, b 둘 다 음수이면 $ab>0$, $a+b<0$으로 서술하면 더 간결하게 서술할 수 있습니다. 또, a, b의 부호가 다를 때, 필요한 경우 두 수의 절댓값을 표기하고, a, b 둘 중 어느 하나를 음수로 정해야 하는 경우에는 $ab<0$보다는 $a<0<b$ 등으로 서술하는 것이 더 간결합니다. 이런 식으로 두 수(혹은 그 이상의 개수의 수)에 대해 항상 성립하며, 제시한 조건으로부터 누구나 쉽게 추론할 수 있는 조건(잘 알려진 법칙(절대 부등식이나 삼각 부등식 등)이 좋습니다.)의 경우에는 좀 더 간결하게 표현하는 것이 시간, 답안지의 가독성 등의 측면에서 이득입니다.

[논제 4-2] 역행렬이 존재하는 임의의 2×2 행렬 B에 의해 중심이 원점인 원이 옮겨지는 도형은 어떤 도형인지 논하시오. [10점]

출제 의도 : 선행하는 논제들의 결과를 이용하여 주어진 상황을 설명할 수 있다.

마지막 논제는 그동안 열심히 보여 왔던 것들을 이용하면 쉽게 보일 수 있는 것으로, 여기까지 도달한 용자들에게 드리는 '보너스논제'입니다.

예시 답안 : 제시문 (가)에 의하면, 점 (x, y)가 $B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$인 2×2 행렬 B에 의해 옮겨진 점 (x', y')는 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$이다. 이때, B^{-1}이 존재하므로 $ps-qr\neq 0$이며, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=B^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $B^{-1}=\dfrac{1}{ps-qr}\begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}$에서 $x=\dfrac{1}{ps-qr}(sx'-qy')$, $y=\dfrac{1}{ps-qr}(-rx'+py')$이므로, 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $k>0$인 원 $x^2+y^2=k^2$에 대입하여 정리하면 다음과 같다. (단, $k\neq 0$)

$$\frac{1}{k^2(ps-qr)^2}\left((r^2+s^2)x^2-2(pr+qs)xy+(p^2+q^2)y^2\right)=1 \quad \cdots\cdots ㉦ \quad (\cdots\cdots ①)$$

이때, $r=s=0$이거나 $p=q=0$이면 $ps-qr=0$이 되는데, $ps-qr\neq 0$이므로 이는 모순이다. 따라서 $r^2+s^2>0$이고, $p^2+q^2>0$이다. 또한 , $4(pr+qs)^2-4(r^2+s^2)(p^2+q^2)=-4(p^2s^2-2pqrs+q^2r^2)=-4(ps-qr)^2<0$ ($\because ps-qr\neq 0$)이므로, [논제 4-1]의 ⅰ)에 의해 ㉦은 원점이 중심인 하는 타원이다. 이때, $ps+qr=0$이고, $r^2+s^2=p^2+q^2$인 경우 ㉦은 원점이 중심인 원이 된다.

$\therefore$ 역행렬이 존재하는 임의의 2×2 행렬 B에 의해 중심이 원점인 원이 옮겨지는 도형은 원점을 중심으로 하는 타원 혹은 원이다. (…… ②)

채점 기준

$B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$로 설정한 후 x, y와 x', y' 사이의 관계식을 이용하여 중심이 원점인 원이 옮겨진 방정식을 구함. (①) …………………… 6점

①에서 구한 방정식(㉦)을 이용해 옮겨진 방정식이 타원 혹은 원임을 보임 (②) ………………… 4점

(이외에도 논리적으로 서술한 경우 10점 모두 득점. 단, ②에서 ㉦이 원이 될 수도 있음을 보이지

않은 경우 1점 감점.)

이 논제에서 조금 덧붙이자면, 2차원의 평면상의 모든 점 P들은 서로 평행하지 않은 두 개의 단위 기저벡터 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$(여기서 기저벡터란, 차원을 구성하는 데 필요한(또는, 벡터들의 실수배와 합을 통하여 임의의 점을 표시하는 데 필요한), 각각이 모두 평행하지 않은 최소한의 벡터입니다. 즉, n차원의 기저벡터는 n개의 각각이 평행하지 않은 벡터이며, 이 기저벡터들의 실수배와 합을 통하여 n차원의 임의의 점을 표현할 수 있습니다.)와 임의의 실수 x, y에 대하여 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$로 표현할 수 있습니다. 이때, $\overrightarrow{e_1}=(1,0)$, $\overrightarrow{e_2}=(0,1)$인 경우가 우리들이 자주 쓰는 데카르트 좌표계(직교 좌표계)이고, x, y가 $f(x,y)=0$꼴로 표현 가능한 음함수의 관계를 가지는 경우, 점 P의 좌표가 바로 곡선 $f(x,y)=0$이 되는 것입니다. 그런데 일차변환 g로 점 P, 벡터 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$를 옮긴 것들을 각각 점 P', 벡터 $\overrightarrow{e_1}'$, $\overrightarrow{e_2}'$라 한다면, $g\left(\overrightarrow{OP}\right)=g\left(x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}\right)=x\overrightarrow{e_1}'+y\overrightarrow{e_2}'=\overrightarrow{OP'}$(일차변환의 선형성 이용. 이해가 안 되면 교과서 참고....)이므로, 두 벡터 $\overrightarrow{e_1}'$, $\overrightarrow{e_2}'$를 기저벡터로 하는 새로운 평면을 만들 수 있습니다. 이때, x와 y의 부호에 따라 결정된 점 P의 위치관계(ex : 사분면 등)는 점 P'의 위치관계와 동일합니다. 만약, 임의의 실수 x, y에 대하여 $x+y=1$이면, P는 두 벡터 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$의 종점을 지나는 직선이 되고, P'은 두 벡터 $\overrightarrow{e_1}'$, $\overrightarrow{e_2}'$의 종점을 지나는 직선이 됩니다. 이는 점 P가 존재하는 영역에 대해서도 성립합니다. 즉, 임의의 실수 x, y에 대하여 $x+y\le 1$이면 점 P는 두 벡터 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$의 종점을 지나는 직선과 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$의 시점(즉, 교점. 여기서는 원점)을 포함하는 영역이 되며, 점 P'의 영역 또한 $\overrightarrow{e_1}'$, $\overrightarrow{e_2}'$의 종점을 지나는 직선과 $\overrightarrow{e_1}'$, $\overrightarrow{e_2}'$의 시점(즉, 교점. 혹은 새로운 좌표계에서의 원점)을 포함하는 영역이 됩니다.

드디어! 길고 긴 2회차 해설이 끝났습니다!!!!! (엄청 기뻐요!!!) 이 해설을 작성하는 데 걸린 시간이 엄청났습니다. 또 해설을 시작하면서 장황하게 말했다시피, 이번 회차 논술 모의고사를 만들면서 계속 문제랑 풀이를 고치고, 또 고치고, 계속 고치고.... 하여간 절대 끝날 것 같지 않던 2회차 해설이 드디어 끝났습니다!!!(내 다시는 이런 식의 문제는 안 만든다!) 제작자도 고생하고, 여러분도 고생한 이번 2회차는 아마 악몽의 2회차로 남을 듯 합니다..... 하고 싶은 말은 많지만, 이제 슬슬 해설을 작성하는 게 귀찮아지기 시작했고아빨리들어가서쉬고싶어라, 이 방대한 양의 해설을 꼼꼼히 읽을 분들이 과연 있을까 싶습니다. 마지막으로 2016학년도 수시 논술을 준비하는 수험생에게만 해당하는 조언인데요, 이번 회차를 공부한 후엔 반드시 일차변환 부분을 심도 있게 공부하시길 바랍니다. 올해 꼭 한번은 출제될 가능성이 높은 단원이기 때문이지요.

그럼, 좀 많이 쉬운 3회차에서 다시 돌아오겠습니다! (‘안 돌아와도 돼!’라고 생각하지 말아주세요.... 어차피 돌아올 거니까요.)

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)