미분의 정의와 관련 조건 해석에 대해

글. 진민

학생들은 미분계수의 정의를 알까?

나는 2~3등급 학생이라면 알 것이라고, 알아야 한다고 생각한다.

그러면 여기 이 문제들 에서 체크된 조건들을 무리없이 해석할 수 있는가?

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\boxed{\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$ 이다.

[2022.09(평가원) 22번]

실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 함수

$$y=x^4-4x^3+10x-30\ ,\ y=2x+2$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 점 A와 점 B 사이의 거리를 $f(t)$라 하자.

$$\boxed{\lim_{h\to0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\le0}$$

을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은?

[2015.09(평가원) 21번]

두 가지 전부 편하게 해석할 수 있다면 이 글을 읽지 않아도 된다.

이 글에서 다룰 것은 미분계수의 정의와 관련해서 문제에 나와있는 조건들을 해석하는 방법을 배울 것이다. 저런 문제들처럼 조건 자체의 해석이 어렵다면 학생들이 문제 풀기가 굉장히 까다로워 지는데, 나는 이것을 문제의 껍질이 단단하다고 표현한다. 그 껍질을 깨더라도 문제가 확 풀리는 건 아니지만, 먼저 이 껍질을 깨는 연습부터가 되어야 한다.

새로운 조건이라고 해서 새로운 개념으로 푸는 것이 아니다.

이번년도 수능엔 또 다른 조건이 출제되겠지! 그럼에도 우리가 알고 있는 개념과 정의를 이용해서 푸는 것이다. 자 그럼 이제부터 우리가 아는 정의를 복습하겠다. 보면 나도 아는데? 너무 쉽잖아라고 느낄 만한 내용이다. 아는 내용이라서 지루해서 글을 읽다가 중간에 포기하지 않았으면 좋겠다ㅠㅠ

미분계수의 정확한 정의

먼저, 함수 $f(x)$의 $x=a$에서 극한은 $\lim_{x\to a} f(x)$이다. 극한이 존재하기 위해선 당연하게도 좌극한과 우극한이 같아야 하고 그 둘이 다르면 극한은 존재하지 않는다. 너무 당연한 내용이다.

함수 $f(x)$의 $x=a$에서 미분계수는 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$이다.

평균변화율의 극한 형태, 즉 한점에서의 접선인데 우리는 정의를 배울 때 평균변화율을 구성하는 두 점은 무조건 **동점이 정점으로 양쪽에서 다가가는** 이미지가 되어야 한다.(여기서도 x가 a로 다가가면서 $(x, f(x))$가 $(a, f(a))$로 다가가고 있다.)이 극한 값이 존재할 때, 즉 **좌극한=우극한** 일 때, 우리는 함수가 $x=a$에서 **미분이 가능하다**고 하고 $f'(a)$라고 쓸 수 있다. 여기서 **좌극한은 좌미분계수**, **우극한은 우미분계수** 라고 부른다.

〈번외〉
미분계수의 정의와 관련된 사관학교 기출문제.

양쪽에서 다가가는 이미지란?
ㄱ은 정점과 동점이지만 좌미분계수가 존재하지 않으므로 미분의 정의가 될 수 없다.
(왼쪽에서의 접선의 기울기가 존재하지 않는다.)
ㄷ은 동점 두개 이므로 미분의 정의가 아니다.

모든 실수 x에서 정의된 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하기 위한 필요충분조건인 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?

< >

ㄱ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}$ 의 값이 존재한다.

ㄴ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3}$ 의 값이 존재한다.

ㄷ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 의 값이 존재한다.

미분 불가능?

우리가 대표적으로 알고있는 미분 불가능한 지점이 있는 함수는 절댓값이 씌워진 함수이다.
$y=|x-a|$함수는 $x=a$에서 미분이 불가능하다. 그 이유는 미분계수의 정의인 극한 값이 존재하지 않기 때문인데, 우리는 첨점 이라는 개념으로 부르는 것이 익숙할 것이다. 그래프만 봐도 좌미분계수와 우미분계수가 다르기에 (V모양이므로) 우리는 이를 첨점이라고 부르고 직접 위 극한에서 좌극한, 우극한을 계산해보지 않고도 미분이 불가능하다고 알 수 있다.

자 그러면 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 이런건 뭘까?

"분자 함수 안에 있는 a+h 와 a−h를 뺀 값이 2h 이므로 평균변화율 이고.. 평균변화율의 극한은 미분계수 이니까.. 저건 $f'(a)$라고 얘기할 수 있지"
이것이 대표적으로 개념을 잘못 알고 있는 것인데, 평균변화율의 극한은 미분계수의 정의가 아니다. 미분계수의 정의는 위에서 소개했던 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, 또는 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 이다. 우리가 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 를 $f'(a)$라고 부를 수 있을 때는, $x=a$에서 미분이 가능할 때 만이다. 그 이유를 잘 모르는 학생들이 많은데 소개하자면
$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 를 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)+f(a)-f(a)}{2h}$ 로 식을 변형하고
$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{2h}+\lim_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{2h}$ 로 변형해서 미분이 가능하다면 각각 $\frac{1}{2}f'(a)$로 쓸 수 있기 때문에 더해서 $f'(a)$라고 쓸 수 있는 것이다.

함수 $f(x)$에 대하여 〈보기〉에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

< >

ㄱ. $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$이면 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이다.
ㄴ. $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$이면
$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$이다.
ㄷ. $f(x)=|x-1|$일 때,
$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$이다.

08.6월 평가원 문제

여기서 ㄷ 선지를 보고 틀렸다고 체크하는 경우가 굉장히 많다.
그 이유는 $x=1$에서 미분이 불가능하다고 생각하기 때문인데,
실제로 저것은 미분이 불가능하므로 저 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$은 미분과 아무런! 관련이 없다. 단순 $\frac{0}{0}$꼴의 극한 일 뿐이다!

즉 미분이 가능할 때만 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$를 $f'(a)$라고 쓸 수 있다.
그러면 우리는 미분이 가능하다면!
$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\lim_{h\to0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 등을 모두 $f'(a)$라고 쓸 수 있다.
하지만 미분이 불가능하다면 저 식들은 각자 다른 의미를 가진다.
$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$는 단순 $\frac{0}{0}$꼴의 극한
$\lim_{h\to0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$는 우미분계수
$\lim_{h\to0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$는 좌미분계수이다.
여기서 헷갈리는 학생들이 조금 있었는데, **미분이 불가능하다면 미분계수가 존재하지 않는 것이다. 이건 좌미분계수와 우미분계수가 다른것이지 그 둘이 존재하지 않는다는 뜻이 아니다.**(물론 ∞로 발산한다면 그 둘도 존재하지 않는다, 첨점을 기준으로 얘기한다.)

자 실전 문제에서!

실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 함수 $y=x^4-4x^3+10x-30$, $y=2x+2$의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 점 A와 점 B 사이의 거리를 $f(t)$라 하자.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to 0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\le 0$$

을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은?
[16.6월 평가원 21번(나형)]

16년도 21번이면 지금 객관식 15번 문제의 위치이다. 여기서 저기 거리의 식을 $f(t)$라고 하였는데 구해보면

$f(t)=\left|x^4-4x^3+8x-32\right|$가 나온다.

그러면 우리가 해석할 것은 이 조건 $\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to 0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\le 0$가 무슨 뜻이냐는 건데, 여기서

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$는 절대로 $f'(t)$가 아니다! 가져야할 마음가짐은

함수가 미분이 가능하다면 $\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=f'(t)$ 라는 것이고

미분이 불가능하다면(첨점에서) $\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$는 우미분계수 $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$는 좌미분계수 이라는 것이다.

존재하지 않는 것이 아니라! 그렇다면 함수에서 좌미분계수와 우미분계수를 곱해서 0보다 작다는 것은 부호가 다르다는 것이고 결국 첨점이 t가 된다.

그리고 미분이 가능할 때는 $[f'(t)]^2\le 0$으로 바뀌므로 $f'(t)=0$이 되어 t는 미분계수가 0일 때가 된다.

22번 문제, 물론 어렵다

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
> (나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고
> $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

우선 $\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$에서 절댓값을 풀어주고 미분계수의 정의로써 확인할 것이다.
갑자기? 란 생각이 들 수 있는 학생들을 위해 우선 이 내용을 간단히 설명하겠다.(이에 대한 칼럼을 또 준비중이다.)

$\frac{0}{0}$꼴의 극한은 우리는 두가지 방법으로 풀어낸다.

첫 번째로, 약분!

예를 들어, $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x-3}$을 물어본다면 우리는 당연히 인수분해 해서 $\frac{0}{0}$꼴을 만드는 인수인 $(x-3)$을 약분 할 것이다.
(현우진T는 이 것을 0인자 라고 부른다.)

두 번째로! 미분계수의 정의이다. $f(x), g(x)$가 다항함수이고

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=5$ 라는 조건이 있다면 우리는 $f(x), g(x)$를 모르므로 인수분해, 약분을 할 수가 없다. 그래서 $f(1)=g(1)$이니까 이를 더하고 빼서 미분계수의 정의로 바꾼다음 $f'(1)-g'(1)=5$라는 조건으로 바꾼다.

즉 $\frac{0}{0}$꼴의 극한은 함수의 식이 나와있다면 인수분해, 약분 할 수 있고

함수의 식이 안나오거나 너무 복잡해서 인수분해, 약분 할 수 없다면 미분계수의 정의로써 보는 것이다.

> 예)너무 복잡해서 인수분해를 못하는 형태
> $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^{27}}{1-x}$ 의 값은?
> 이는 $f(x)=1-x^{27}$으로 치환하여 미분계수의 정의로 확인한다.

즉 $\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$에서 $f(x)$가 주어져있지 않으므로 약분할 수 없어서 미분 계수의 정의로 해석을 시도한다. 미분 계수의 정의로 식을 해석하는 방법은 두가지가 존재하는데 $|f(x)|$를 치환하는 방법이 있고 $|f(x)|$를 풀어주는 방법이 있다. $|f(x)|$를 풀어주는 방법이 더 쉽다고 생각하므로 이를 소개하겠다.

그래서 $f(x)>0,\quad f(x)<0,\quad f(x)=0$ 일때로 나눠서 식을 확인한다.

$f(x)>0$ 일 때는, $f(x+h),\ f(x-h)$는 $f(x)$와 아주아주 가까운 점이므로 +가 되므로

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)\ -\ f(x-h)}{h}$ 가 되고 $f(x)$는 3차함수이므로 미분이 가능해서 저 식은 $2f'(x)$가 된다.

$f(x)<0$ 일 때는, 마찬가지의 논리로 모두 음수로 나와서

$\lim_{h\to 0+}\frac{-f(x+h)\ +\ f(x-h)}{h}$ 가 되고 마찬가지로 $-2f'(x)$가 된다.

$f(x)=0$일 때가 굉장히 어려운데,

$f(x)=0$ 이라면 $f(x+h),f(x-h)$는 양수일 수도 있고 음수 일수도 있다.

그래서 $f(x)$가 x축에 접할 때, 접하지 않고 뚫고 나갈 때 로 나누어서 확인해주어야 한다.

접하게 되면 두 개의 부호가 같으므로 $2f'(x)$ 혹은 $-2f'(x)$의 결과가 나온다, 즉 그러면 0이 된다.

접하지 않고 뚫고 나가게 되면 $\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)\ +\ f(x-h)}{h}$ 이거나 $\lim_{h\to 0+}\frac{-f(x+h)\ -\ f(x-h)}{h}$ 이 되고 이를 미분계수의 정의로 풀어주면 결국 0이 나온다.

즉 이 조건, $\lim_{h\to 0+}\frac{|\ f(x+h)\ |-|\ f(x-h)\ |}{h}$ 은 어떤 함수가 되고 그 함수는

$f(x)>0$ 일 때, $2f'(x)$

$f(x)<0$ 일 때, $-2f'(x)$

$f(x)=0$ 일 때, 0의 값을 갖는 함수이다.

라고 해석 할 수 있다.

지금까지 배운 것은..

미분계수의 정확한 정의와 그에 따른 문제의 조건을 어떻게 해석하는가 이다. 요약하자면

좌미분계수, 우미분계수가 둘다 존재하고 같을 때, 미분가능하다고 하고 미분계수가 존재한다고 한다.

좌미분계수 혹은 우미분계수, 평균변화율의 극한식이 나온다면 함수가 그 점에서 미분이 가능한지 불가능한지 확인하고 식을 해석하면 된다.

이를 꼭 기억하자!

문제에 실제로 적용해보는 연습이 필요하므로 사관학교의 좋은 문제를 마지막에 소개하며 끝을 내겠다.

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ 2f(1)-f(x) & (x \ge 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< >

ㄱ. 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{h\to 0+}\frac{g(-1+h)+g(-1-h)-6}{h}=a$ (a는 상수) 이고 $g(1)=1$이면 $g(a)=1$이다.

ㄷ. $\lim \frac{g(b+h)+g(b-h)-6}{h}=4$ (b는 상수) 이면 $g(4)=1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답은 4번이고 ㄴ과 ㄷ선지, 특히 ㄷ선지를 잘 해석해보자!