2. 자연계열

[단국대학교 문항카드 7]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) 문항번호	자연계열, 오전 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	미분법, 함수의 극대와 극소, 적분법, 정적분
예상 소요 시간	70 분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

<제시문>

(가) 미분가능한 두 함수 $y=f(u)$와 $u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

(나) 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서

(1) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$

(2) $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$

(다) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 미분가능한 함수 $x=g(t)$에 대하여 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 도함수 $g'(t)$가 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

[논제 1] 자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=nx^2e^{-x}, \quad g(x)=(f\circ f)(x)$$

x에 대한 방정식 $g'(x)=0$이 서로 다른 3개의 실근을 갖도록 하는 n을 모두 구하시오. (단, e는 2.7로 계산) (15점)

[논제 2] 실수 전체의 집합에서 연속인 도함수를 갖는 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(1) $\int_1^3 h(x)dx = 9$

(2) 모든 자연수 n에 대하여 구간 $[3^n, 3^{n+1})$에서 $h(x) = h\left(\frac{x}{3}\right) + 1$

$\int_1^{81} (h(x) + h'(x))dx$의 값을 구하시오. (20점)

[논제 3] 모든 실수 x에 대하여 $k(x) > 0$인 연속함수 $k(x)$와 함수

$$S(x) = \int_0^x k(t)dt$$

가 두 양수 a, b에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(1) $\int_a^b k(x)dx = 3S(a) + 3$

(2) $\int_a^b \frac{S(x)e^{S(x)}}{(S(x)+1)^2} k(x)dx = \frac{e^{S(a)}}{S(b)+1}\left(e^{6(S(a)+1)} - 67e^{3(S(a)+1)} + 252 \right)$

$S(b)$의 값을 구하시오. (20점)

3. 출제 의도

▹ [논제 1] 도함수의 개념을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가
▹ [논제 2] 치환적분법을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가
▹ [논제 3] 정적분의 개념을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가, 나, 다)	교육과정	[수학 II] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 - [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법 -[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 적분법

<table>
<tr><th colspan="2">문항 및 제시문</th><th>관련 성취기준</th></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td></td><td>- [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·성취수준</td><td>[수학 II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용
 - [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

[미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법
 -[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.

[미적분] - (3) 적분법 - (가) 여러 가지 적분법
 - [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">논제 1-1</td><td>교육과정</td><td>[수학 II] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용
 - [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
 - [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법
 -[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·성취수준</td><td>[수학 II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용
 - [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
 - [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

[미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법
 -[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">논제 1-2</td><td>교육과정</td><td>[미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 적분법
 - [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·성취수준</td><td>[미적분] - (3) 적분법 - (가) 여러 가지 적분법
 - [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">논제 1-3</td><td>교육과정</td><td>[미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 적분법
 - [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

[미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용
 - [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·성취수준</td><td>[미적분] - (3) 적분법 - (가) 여러 가지 적분법
 - [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

[미적분] - (3) 적분법 - (나) 정적분의 활용
 - [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	고성은 외	좋은책 신사고	2020	61-66, 72-74, 83-90
	수학 II	이준열 외	천재교육	2020	60-63, 74-76, 83-96
	미적분	김원경 외	비상	2020	79-82, 147-149
	미적분	황선욱 외	미래엔	2020	86-89, 166-167

5. 문항 해설

▹ [논제 1] 미분법 및 함수의 그래프 개형 등을 활용하여 방정식의 해의 문제를 해결할 수 있는지를 평가하기 위한 문제이다.
[논제 2] 적분법을 활용하여 정적분의 값을 구할 수 있는지를 평가하기 위한 문제이다.
[논제 3] 정적분의 개념과 적분법을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하기 위한 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	$f'(x)=0$ 인 x 의 값을 제시	5
	$f'(f(x))=0$ 인 x 의 값을 제시	5
	정답을 제시	5
1-2	$\int_1^{81} h'(x)dx$ 의 값을 제시	6
	$\int_3^{3^2} h(x)dx$, $\int_{3^2}^{3^3} h(x)dx$, $\int_{3^3}^{3^4} h(x)dx$ 의 값을 제시	10
	정답을 제시	4
1-3	$S(b)=4S(a)+3$ 을 제시	4

하위 문항	채점 기준	배점
	방정식 $\frac{e^{S(a)}}{4(S(a)+1)}\left(e^{3(S(a)+1)}-4\right)=\frac{e^{S(a)}}{4(S(a)+1)}\left(e^{6(S(a)+1)}-67e^{3(S(a)+1)}+252\right)$ 를 제시	10
	정답을 제시	6

7. 예시 답안

[논제 1] 주어진 자연수 n에 대하여

$$f'(x) = 2nxe^{-x} - nx^2e^{-x} = nx(2-x)e^{-x}$$

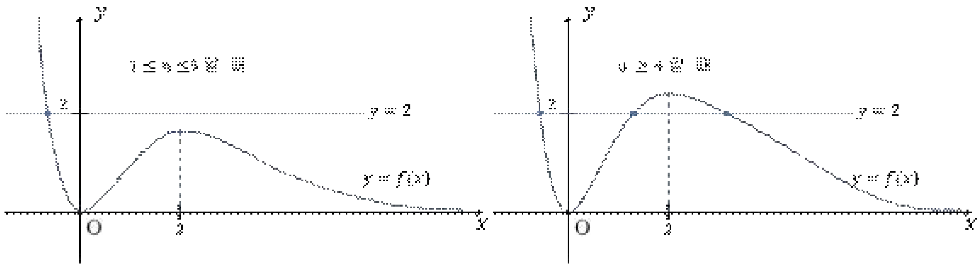
이므로 다음과 같은 증가와 감소를 나타내는 표를 얻을 수 있다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4ne^{-2}$	$\searrow$

즉, 극솟값은 $f(0)=0$이고 극댓값은 $f(2)=4ne^{-2}$이다.
한편, 합성함수 미분법에 따라

$$g'(x) = f'(f(x))f'(x)$$

이므로 방정식 $g'(x)=0$의 해는 $f'(f(x))=0$의 해 또는 $f'(x)=0$의 해이다.
(i) $f'(x)=0$인 경우 : 위 표로부터 $x=0$ 또는 $x=2$이다.
(ii) $f'(f(x))=0$인 경우 : $f(x)=0$ 또는 $f(x)=2$이다.
(a) $f(x)=0$인 경우 : 함수 $f(x)$는 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 양수이므로, 방정식 $f(x)=0$의 해는 $x=0$ 뿐이다.
(b) $f(x)=2$인 경우 : $4ne^{-2} < 2 \Leftrightarrow n < \dfrac{e^2}{2} = 3.645$ ($e=2.7$로 계산)
이므로 $n \le 3$ 일 때만 방정식 $f(x)=2$가 음의 해 하나만 가짐을 알 수 있다.
(i)와 (ii)에 의하여 $n=1,2,3$.



[참고 그림]

[논제 2] 조건 (2)로 부터

$$h(3^4) = h(3^3)+1 = h(3^2)+2 = h(3)+3 = h(1)+4$$

이므로

$$\int_1^{81} h'(x)dx = h(81)-h(1) = h(3^4)-h(1) = 4$$

조건 (1)에서 $\displaystyle\int_1^3 h(x)dx = 9$이므로

$$\int_3^{3^2} h(x)dx = \int_3^{3^2}\left\{h\left(\frac{x}{3}\right)+1\right\}dx = 3\int_1^3 h(t)dt + (3^2-3) = 33$$

$$\int_{3^2}^{3^3} h(x)dx = \int_{3^2}^{3^3}\left\{h\left(\frac{x}{3}\right)+1\right\}dx = 3\int_{3}^{3^2} h(t)dt + (3^3-3^2) = 117$$

$$\int_{3^3}^{3^4} h(x)dx = \int_{3^3}^{3^4}\left\{h\left(\frac{x}{3}\right)+1\right\}dx = 3\int_{3^2}^{3^3} h(t)dt + (3^4-3^3) = 405$$

따라서

$$\begin{aligned}
&\int_{1}^{81}(h(x)+h'(x))dx \\
&= \int_{1}^{3^4} h(x)dx + \int_{1}^{3^4} h'(x)dx \\
&= \int_{1}^{3} h(x)dx + \int_{3}^{3^2} h(x)dx + \int_{3^2}^{3^3} h(x)dx + \int_{3^3}^{3^4} h(x)dx + \int_{1}^{3^4} h'(x)dx \\
&= 9+33+117+405+4 \\
&= 568
\end{aligned}$$

[논제 3] 조건 (1)에 의하여 $S(b)-S(a)=\int_a^b k(x)dx = 3S(a)+3$이므로

$$S(b)=4S(a)+3 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\star)$$

$S(x)=\int_0^x k(t)dt$에서 $S'(x)=k(x)$이므로

$$\int_a^b \frac{S(x)e^{S(x)}}{(S(x)+1)^2}k(x)dx = \int_{S(a)}^{S(b)} \frac{ue^u}{(u+1)^2}du = \left[\frac{e^u}{u+1}\right]_{S(a)}^{S(b)} = \frac{e^{S(b)}}{S(b)+1} - \frac{e^{S(a)}}{S(a)+1}$$

이고 $(\star)$을 이용하면

$$\int_a^b \frac{S(x)e^{S(x)}}{(S(x)+1)^2}k(x)dx = \frac{e^{4S(a)+3}}{4(S(a)+1)} - \frac{e^{S(a)}}{S(a)+1} = \frac{e^{4S(a)+3}-4e^{S(a)}}{4(S(a)+1)}$$

$$= \frac{e^{S(a)}}{4(S(a)+1)}\left(e^{3(S(a)+1)}-4\right)$$

$(\star)$과 조건 (2)를 이용하여 다음 방정식을 얻는다.

$$\frac{e^{S(a)}}{4(S(a)+1)}\left(e^{3(S(a)+1)}-4\right) = \frac{e^{S(a)}}{4(S(a)+1)}\left(e^{6(S(a)+1)}-67e^{3(S(a)+1)}+252\right)$$

이로부터

$$(e^{3(S(a)+1)}-4)(e^{3(S(a)+1)}-64)=0$$

여기에서 $e^{3(S(a)+1)}-4 > e^3-4 > 0$이므로 $e^{3(S(a)+1)}=64$이고

$$S(a)=2\ln 2-1$$

따라서

$$S(b)=4S(a)+3=8\ln 2-1$$

[단국대학교 문항카드 8]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) 문항번호	자연계열, 오전 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	미분법, 함수의 극대와 극소
예상 소요 시간	50 분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

<제시문>

(가) 미분가능한 함수 $f(x)$의 최솟값을 구하기 위하여 도함수 $f'(x)$를 활용할 수 있다.
(나) 극한값 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$가 존재하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.
(다) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

[논제 1] 방정식 $e^x - \lvert x^2 - ex \rvert = 0$의 실근의 개수를 구하시오. (20점)

[논제 2] 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(1) 점 $(t, 0)$을 지나는 직선 ℓ이 곡선 $y=e^x$에 접할 때 접점의 x좌표를 $u(t)$라 하자. $\int_t^{u(t)} e^x\,dx = 1-\frac{1}{e}$일 때 직선 ℓ은 점 $(0, f(0))$에서 곡선 $y=f(x)$와 접한다.
(2) $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}$
(3) 곡선 $y=f(e^x)$는 곡선 $y=e^x$와 한 점에서만 만난다.

함수 $g(x)=|f(x)-x|$가 $x=p$에서 미분가능하지 않을 때, 실수 p의 값을 구하시오. (25 점)

3. 출제 의도

▹[논제 1] 미분을 활용하여 실근의 개수를 구할 수 있는지를 평가
▹[논제 2] 미분의 개념을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

<table>
<tr><th colspan="2">문항 및 제시문</th><th>관련 성취기준</th></tr>
<tr><td rowspan="2">제시문
(가, 나, 다)</td><td>교육과정</td><td>[수학 II] - (2) 미분 - $\boxed{1}$ 미분계수
- [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.

[수학 II] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용
- [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
- [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다
- [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용
- [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
- [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
- [12미적02-13] 방정식과 부등식의 문제를 해결할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·성취수준</td><td>[수학 II] - (2) 미분 - (가) 미분계수
- [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.

[수학 II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용
- [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
- [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다
- [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

[미적분] - (2) 미분법 - (다) 도함수의 활용
- [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
- [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">문항 및 제시문</th><th>관련 성취기준</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>- [12미적02-13] 방정식과 부등식의 문제를 해결할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">논제 2-1</td><td>교육과정</td><td>[수학 II] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용
- [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다
- [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용
- [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
- [12미적02-13] 방정식과 부등식의 문제를 해결할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·성취수준</td><td>[수학 II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용
- [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다
- [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

[미적분] - (2) 미분법 - (다) 도함수의 활용
- [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
- [12미적02-13] 방정식과 부등식의 문제를 해결할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">논제 2-2</td><td>교육과정</td><td>[수학 II] - (2) 미분 - $\boxed{1}$ 미분계수
- [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.

[수학 II] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용
- [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
- [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다
- [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용
- [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
- [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
- [12미적02-13] 방정식과 부등식의 문제를 해결할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·성취수준</td><td>[수학 II] - (2) 미분 - (가) 미분계수
- [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.

[수학 II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용
- [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
- [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다
- [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</td></tr>
</table>

문항 및 제시문		관련 성취기준
		[미적분] - (2) 미분법 - (다) 도함수의 활용 - [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. - [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. - [12미적02-13] 방정식과 부등식의 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학II	홍성복 외	지학사	2018	75-77, 90-98
	수학II	류희찬 외	천재교과서	2018	52-59, 67-70, 78-97
	미적분	박교식 외	동아출판	2020	100-122

5. 문항 해설

▹ [논제 1] 미분법 및 함수의 그래프를 활용하여 방정식 실근의 개수를 구할 수 있는지를 평가하기 위한 문제이다.
[논제 2] 접선의 개념과 함수의 개념을 활용하여 함수의 미분가능성을 판단할 수 있는지를 평가하기 위한 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	$x \le 0$ 인 경우 실근의 개수가 1인 이유를 제시	5
	$x \ge e$ 인 경우 실근의 개수가 0인 이유를 제시	5
	$0 < x < e$ 인 경우 실근의 개수가 0인 이유를 제시	10
2-2	접선 ℓ 의 방정식을 제시	5
	함수 $f(x)$ 의 일차항의 계수와 상수항을 제시	5
	함수 $f(x)$ 의 삼차항과 이차항의 계수를 제시	10
	함수 $g(x)$ 가 미분가능하지 않은 점을 제시	5

7. 예시 답안

[논제 1] $h(x) = e^x - | x^2 - ex| = e^x - | x(x-e)|$라 하자.

(i) $x \le 0$일 때 : $h(x) = e^x - x^2 + ex$이고 $h'(x) = e^x - 2x + e > 0$이므로 $h(x)$는 증가함수이고 $\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$, $h(0) = 1$이므로 방정식 $h(x) = 0$은 구간 $(-\infty, 0]$에서 하나의 실근을 갖는다.

(ii) $x \ge e$일 때 : $h(x) = e^x - x^2 + ex$이고 $h'(x) = e^x - 2x + e$이다.

$h''(x) = e^x - 2$에서 $x \ge e$일 때 $h''(x) > 0$이므로 $h'(x)$가 증가한다.

$h'(e) = e^e - e > 0$이므로 $x \ge e$일 때 $h'(x) > 0$, 즉 $h(x)$가 증가한다.

$h(e) = e^e > 0$이고 $h(x)$가 증가함수이므로 방정식 $h(x) = 0$은 구간 $[e, \infty)$에서 실근을 갖지 않는다.

(iii) $0 < x < e$일 때 : $h(x) = (e^x - ex) + x^2$이다.

$e^x - ex$는 $x = 1$에서 최솟값 0을 가지므로 $e^x - ex \ge 0$이고, $x^2 > 0$이므로 $h(x) > 0$이다. 따라서 방정식 $h(x) = 0$은 구간 $(0, e)$에서 실근을 갖지 않는다.

(i)~(iii)에서 방정식 $h(x) = 0$의 실근의 개수는 하나이다.

[논제 2] $y = e^x$ 위의 점 $(u(t), e^{u(t)})$에서 그은 접선의 방정식은 $y = e^{u(t)}(x - u(t)) + e^{u(t)}$이고 이 직선이 x축 위의 점 $(t, 0)$을 지나므로 $u(t) = t + 1$이다. 조건 (1)에서

$$\int_t^{u(t)} e^x\,dx = \int_t^{t+1} e^x\,dx = e^t(e-1) = 1 - \frac{1}{e}$$

이므로 $t = -1$, $u(t) = 0$이고 접선 ℓ의 방정식은 $y = x + 1$이다.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a > 0)$라 할 때 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = x + 1$이 점 $(0, 1)$에서 접하므로 $f(0) = d = 1$이고 $f'(0) = c = 1$이다. 따라서 $f(x) = ax^3 + bx^2 + x + 1$이다.

한편, 조건 (2)로부터 $b = -\frac{3}{2}a$이므로 $f(x) = ax^3 - \frac{3}{2}ax^2 + x + 1$이다.

$e^x = z$라 하면 $z > 0$이고, 조건 (3)에서 $y = az^3 - \frac{3}{2}az^2 + z + 1$과 $y = z$가 구간 $(0, \infty)$에서 오직 한 점에서만 만나야 한다. 즉, $y = az^3 - \frac{3}{2}az^2 + 1$과 $y = 0$이 구간 $(0, \infty)$에서 오직 한 점에서 만나야 한다.

$$\lim_{z \to 0+}\left(az^3 - \frac{3}{2}az^2 + 1\right) = 1, \qquad \lim_{z \to \infty}\left(az^3 - \frac{3}{2}az^2 + 1\right) = \infty$$

이므로 곡선 $y = az^3 - \frac{3}{2}az^2 + 1$과 직선 $y = 0$이 점 $(z_0, 0)$에서 접하는 $z_0 > 0$가 존재한다.

따라서 $3az_0^2 - 3az_0 = 0$, $az_0^3 - \frac{3}{2}az_0^2 + 1 = 0$이어야 하므로 $z_0 = 1$이고 $a = 2$이다.

그러므로 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 1$이다.

함수 $g(x) = |f(x) - x| = |2x^3 - 3x^2 + 1| = |(x-1)^2(2x+1)|$, 즉

$$g(x) = \begin{cases} (x-1)^2(2x+1), & x \ge -\frac{1}{2} \\ -(x-1)^2(2x+1), & x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

따라서 $x \ne -\frac{1}{2}$일 때는 함수 $g(x)$가 미분가능하다. 그러나

$$\lim_{\Delta x \to 0-} \frac{g\left(-\frac{1}{2}+\Delta x\right)-g\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} = -\frac{9}{2}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{g\left(-\frac{1}{2}+\Delta x\right)-g\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{9}{2}$$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서만 미분가능하지 않다.

따라서 $p=-\frac{1}{2}$이다.

[단국대학교 문항카드 9]

1. 일반정보

<table>
<tr><td colspan="2">유형</td><td colspan="2">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사</td></tr>
<tr><td colspan="2">전형명</td><td colspan="2">논술우수자전형</td></tr>
<tr><td colspan="2">해당 대학의 계열(과목)
문항번호</td><td colspan="2">자연계열, 오후 문제1</td></tr>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학 II, 미적분</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>극한, 미분법, 함수의 극대와 극소, 적분법, 정적분</td></tr>
<tr><td colspan="2">예상 소요 시간</td><td colspan="2">75 분 / 전체 120분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

<제시문>

(가) 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 이 역함수가 미분가능할 때,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

(나) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 한다. 이때 L을 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라 하고, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \text{또는} \qquad x \to a\text{일 때 } f(x) \to L$$

과 같이 나타낸다.

(다) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 미분가능한 함수 $x = g(t)$에 대하여 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$일 때 도함수 $g'(t)$가 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

[논제 1] 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = \ln x + 2x^2 + ax + b$가 역함수를 갖고, 0이 아닌 실수 L에 대하여

$$\lim_{x \to 1}\left((f^{-1})'(x) \times \left\{\ln \frac{f^{-1}(x)}{f^{-1}(1)}\right\}^2\right) = L$$

일 때, $a+b+L$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수) (15점)

[논제 2] 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)=\dfrac{(x-2)g'(x)}{g(x)}$와 0이 아닌 실수 c가 다음 조건을 만족시킨다.

(1) $\lim_{x\to 2} h(x)=2$
(2) $\lim_{x\to c} h(\lvert x\rvert)$가 존재하지 않는다.
(3) $g(c)=18c$

$g(2c)$의 값을 구하시오. (20점)

[논제 3] 함수 $k(x) = x + \sin x$ 에 대하여 함수 $F(t)$와 상수 α, β를 다음과 같이 정의하자.

(1) $F(t) = \int_0^{\pi t} \cos(k^{-1}(y))dy$
(2) α는 $0<t<8$에서 $F(t)$가 극댓값인 t의 값 중 가장 큰 값
(3) β는 $0<t<8$에서 $F(t)$가 극솟값인 t의 값 중 가장 큰 값

$F(\beta)-F(\alpha)$의 값을 구하시오. (20점)

3. 출제 의도

▹[논제 1] 역함수의 미분법을 활용할 수 있는지를 평가
▹[논제 2] 함수의 극한을 이해하고 있는지를 평가
▹[논제 3] 극값을 판정하고 치환적분을 할 수 있는지를 평가

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가, 나, 다)	교육과정	[수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - 1 함수의 극한 - [12수학Ⅱ01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다. [미적분] - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법 - [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다. [미적분] - (3)적분법 - 1 여러 가지 적분법

문항 및 제시문		관련 성취기준
		- [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - (가) 함수의 극한 - [12수학Ⅱ01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다. [미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법 - [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다. [미적분] - (3)적분법 - (가) 여러 가지 적분법 - [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
논제 1-1	교육과정	[수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{1}$ 함수의 극한 - [12수학Ⅱ01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다. [미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법 - [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - (가) 함수의 극한 - [12수학Ⅱ01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다. [미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법 - [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.
논제 1-2	교육과정	[수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{1}$ 함수의 극한 - [12수학Ⅱ01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다. [수학 II] - (2) 미분 - $\boxed{2}$ 도함수 - [12수학Ⅱ02-04] 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다. - [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - (가) 함수의 극한 - [12수학Ⅱ01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다. [수학 II] - (2) 미분 - (나) 도함수 - [12수학Ⅱ02-04] 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다. - [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.
논제 1-3	교육과정	[수학 II] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 - [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다

<table>
<tr><th colspan="2">문항 및 제시문</th><th>관련 성취기준</th></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td></td><td>[미적분] - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법
- [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.

[미적분] - (3)적분법 - 1 여러 가지 적분법
- [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다</td></tr>
<tr><td>성취기준·성취수준</td><td>[수학 II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용
- [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다

[미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법
- [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.

[미적분] - (3)적분법 - (가) 여러 가지 적분법
- [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

<table>
<tr><th>참고자료</th><th>도서명</th><th>저자</th><th>발행처</th><th>발행 연도</th><th>쪽수</th></tr>
<tr><td rowspan="3">고등학교
교과서</td><td>수학 II</td><td>이준열 외</td><td>천재교육</td><td>2020</td><td>12-13, 60-68, 83-89</td></tr>
<tr><td>미적분</td><td>홍성복 외</td><td>지학사</td><td>2020</td><td>102-103</td></tr>
<tr><td>미적분</td><td>고성은 외</td><td>좋은책 신사고</td><td>2020</td><td>132-134</td></tr>
</table>

5. 문항 해설

▹[논제 1] 함수의 극한 개념 및 역함수의 미분법을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하는 문제이다.
▹[논제 2] 함수의 성질과 극한 개념 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하는 문제이다.
▹[논제 3] 역함수의 미분법 및 적분법을 활용하여 극값 판정의 문제를 해결할 수 있는지를 평가하기 위한 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	$a=-4$를 제시	5

하위 문항	채점 기준	배점
	$b=\frac{5}{2}+\ln 2$ 를 제시	5
	정답을 제시	5
1-2	$g(x)=(x-2)^2(x+r)$를 제시	5
	$c=-1$을 제시	10
	정답을 제시	5
1-3	극값을 갖는 $k^{-1}(\pi t)$의 값을 제시	5
	$\alpha=\frac{13}{2}+\frac{1}{\pi}$, $\beta=\frac{15}{2}-\frac{1}{\pi}$을 제시	5
	정답을 제시	10

7. 예시 답안

[논제 1] $f^{-1}(x)=y$라 하면 $f(p)=1$인 양의 실수 p가 존재하여

$$\lim_{x\to 1}\left((f^{-1})'(x)\times\left\{\ln\frac{f^{-1}(x)}{f^{-1}(1)}\right\}^2\right)=\lim_{y\to p}\left\{\frac{1}{f'(y)}\times\left(\ln\frac{y}{p}\right)^2\right\}=L\neq 0$$

을 만족시킨다. $\lim_{y\to p}\ln\frac{y}{p}=0$이므로 주어진 극한이 0이 아닌 값으로 수렴하기 위해서는

$$\lim_{y\to p}f'(y)=f'(p)=0$$

이다. 함수 $f(x)$가 역함수를 가지려면 모든 양수 x에서 $f'(x)\geq 0$이거나 모든 양수 x에서 $f'(x)\leq 0$이어야 한다. 그런데 $f'(x)=\frac{1}{x}+4x+a$에서 $\lim_{x\to\infty}f'(x)=\infty$이므로 모든 양수 x에서 $f'(x)\geq 0$이어야 한다. $f'(p)=0$이므로 $f'(p)$는 $f'(x)$의 최솟값이다. 따라서 $f''(p)=-\frac{1}{p^2}+4=0$이므로 $p=\frac{1}{2}$이다. $f'\left(\frac{1}{2}\right)=2+2+a=0$이므로 $a=-4$이다. 또한 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-2+b=1$이므로 $b=\frac{5}{2}+\ln 2$이다.

$$L=\lim_{y\to\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{f'(y)}\times\left(\ln\frac{y}{p}\right)^2\right\}=\lim_{y\to\frac{1}{2}}\frac{\left(\ln y-\ln\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{y}+4y-4}=\lim_{y\to\frac{1}{2}}\left\{\left(\frac{\ln y-\ln\frac{1}{2}}{y-\frac{1}{2}}\right)^2\times\frac{y}{4}\right\}=\frac{1}{2}$$

이므로 $a+b+L=-1+\ln 2$이다.

[논제 2] 조건 (1)에서 $\lim_{x\to 2}(x-2)\frac{g'(x)}{g(x)}=2$이므로 $g(2)=0$이다. 따라서 $1\leq k\leq 3$인 자연수 k와 $p(2)\neq 0$인 $(3-k)$차 다항식 $p(x)$에 대하여

$$g(x)=(x-2)^k p(x)$$

$g'(x)=k(x-2)^{k-1}p(x)+(x-2)^k p'(x)$로부터

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left\{(x-2)\frac{g'(x)}{g(x)}\right\}&=\lim_{x\to 2}\left\{(x-2)\frac{k(x-2)^{k-1}p(x)+(x-2)^k p'(x)}{(x-2)^k p(x)}\right\}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{kp(x)+(x-2)p'(x)}{p(x)}\\&=k\end{aligned}$$

이고 $k=2$이다. 따라서 상수 $r\ (r\neq -2)$에 대하여

$$g(x)=(x-2)^2(x+r) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\star)$$

그러므로

$$h(|x|)=\frac{3|x|+2r-2}{|x|+r}=\begin{cases}\dfrac{3x+2r-2}{x+r}, & x\geq 0\\[2mm] \dfrac{-3x+2r-2}{-x+r}, & x<0\end{cases}$$

이고 조건 (2)에 의하여 $c=r\,(c<0)$ 또는 $c=-r\,(c>0)$이어야 한다. 따라서 $r<0$이어야 한다. 그런데 $c=-r$이면 $g(c)=0$이 되므로 조건 (3)에 모순이다. 따라서 $c=r(r<0,\ r\neq -2)$이다.

$$g(c)=g(r)=(r-2)^2(2r)=18r$$

로부터 $c=r=-1$이고

$$g(x)=(x-2)^2(x-1)$$

그러므로 $g(2c)=g(-2)=-48$

(참고) (*)은 다음과 같은 방법으로도 설명할 수 있다.

조건 (1)로부터 $g(2)=0$ 이다. 따라서 2차 다항식 $p(x)$에 대하여 $g(x)=(x-2)p(x)$이다.

$$\lim_{x\to 2} h(x)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)p(x)+(x-2)^2p'(x)}{(x-2)p(x)}$$

이므로, $p(2)\neq 0$ 이면 위의 극한값이 1이 되어 조건 (1)에 맞지 않는다.

따라서 $p(2)=0$ 이고 1차 다항식 $q(x)$에 대하여 $g(x)=(x-2)^2q(x)$ 이다.

$$\lim_{x\to 2} h(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)^2q(x)+(x-2)^3q'(x)}{(x-2)^2q(x)}$$

이고 $q(2)=0$ 이면 위의 극한값은 3이 되어 조건 (1)에 맞지 않는다.

그러므로 $g(x)=(x-2)^2(x+r)$, $(r\neq -2)$이다.

[논제 3] 함수 $F(t)$ 를 미분하면,

$$F'(t)=\pi\cos(k^{-1}(\pi t)) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (**)$$

그런데 $k'(x)=1+\cos x\geq 0$ 이므로 함수 $k(x)$ 는 증가함수이고 $k^{-1}(x)$ 도 증가함수이다. 따라서 $t\in(0,8)$ 이면 $k^{-1}(\pi t)\in(0,8\pi)$ 이므로 (**)에서

$$k^{-1}(\pi t)=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2},\frac{11\pi}{2},\frac{13\pi}{2},\frac{15\pi}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (***)$$

일 때 $F'(t)=0$ 이다. 또한,

$$F''(t)=-\pi\sin(k^{-1}(\pi t))\frac{d}{dt}k^{-1}(\pi t)$$

여기에서 $k^{-1}(\pi t)=x$ 라 하면 $\pi t=k(x)=x+\sin x$, 즉, $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{\pi}(1+\cos x)$ 이므로

$\dfrac{d}{dt}k^{-1}(\pi t)=\dfrac{\pi}{1+\cos(k^{-1}(\pi t))}$ 이다. 따라서

$$F''(t)=-\frac{\pi^2\sin(k^{-1}(\pi t))}{1+\cos(k^{-1}(\pi t))}$$

여기에서 (***)를 만족시키는 t 에서는

$$\cos(k^{-1}(\pi t))=0$$

$$\sin(k^{-1}(\pi t))=\begin{cases}1, & k^{-1}(\pi t)=\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{9\pi}{2},\frac{13\pi}{2}\\ -1, & k^{-1}(\pi t)=\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{2},\frac{11\pi}{2},\frac{15\pi}{2}\end{cases}$$

여기에서 $k^{-1}(\pi t)=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2},\dfrac{9\pi}{2},\dfrac{13\pi}{2}$ 이면 $F''(t)<0$ 이므로 함수 $F(t)$ 는 극댓값을 갖고,

$k^{-1}(\pi t)=\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{7\pi}{2},\dfrac{11\pi}{2},\dfrac{15\pi}{2}$ 이면 $F''(t)>0$ 이므로 함수 $F(t)$는 극솟값을 갖는다.

그런데 $k^{-1}(\pi t)$ 는 t 의 증가함수이므로

$$\alpha=\frac{1}{\pi}k\left(\frac{13\pi}{2}\right)=\frac{13}{2}+\frac{1}{\pi}, \quad \beta=\frac{1}{\pi}k\left(\frac{15\pi}{2}\right)=\frac{15}{2}-\frac{1}{\pi}$$

따라서

$$F(\beta)-F(\alpha)=F\left(\frac{15}{2}-\frac{1}{\pi}\right)-F\left(\frac{13}{2}+\frac{1}{\pi}\right)=\int_{\frac{13}{2}\pi+1}^{\frac{15}{2}\pi-1}\cos(k^{-1}(y))dy$$

여기에서 $k^{-1}(y)=x$ 로 치환하면 $y=k(x)=x+\sin x$ 이므로
$k\left(\frac{13}{2}\pi\right)=\frac{13}{2}\pi+1$, $k\left(\frac{15}{2}\pi\right)=\frac{15}{2}\pi-1$, $dy=(1+\cos x)dx$ 에서

$$F(\beta)-F(\alpha)=\int_{\frac{13}{2}\pi}^{\frac{15}{2}\pi}\cos x\,(1+\cos x)dx=\int_{\frac{13}{2}\pi}^{\frac{15}{2}\pi}\left(\cos x+\frac{\cos(2x)+1}{2}\right)dx=\frac{\pi}{2}-2$$

[단국대학교 문항카드 10]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) 문항번호	자연계열, 오후 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	미분법, 함수의 극대와 극소, 적분법, 정적분
예상 소요 시간	45분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

<제시문>

(가) 두 변수 x, y의 관계를 새로운 변수 t를 이용하여

$$x = f(t),\quad y = g(t)$$

와 같이 나타낼 때, t를 매개변수라 한다.

(나) 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f'(a) = 0$이고 $x = a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌거나 음에서 양으로 바뀌면 $f(a)$는 극값이다.

(다) 두 함수 $f(x), g(x)$가 미분가능하고 $f'(x), g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

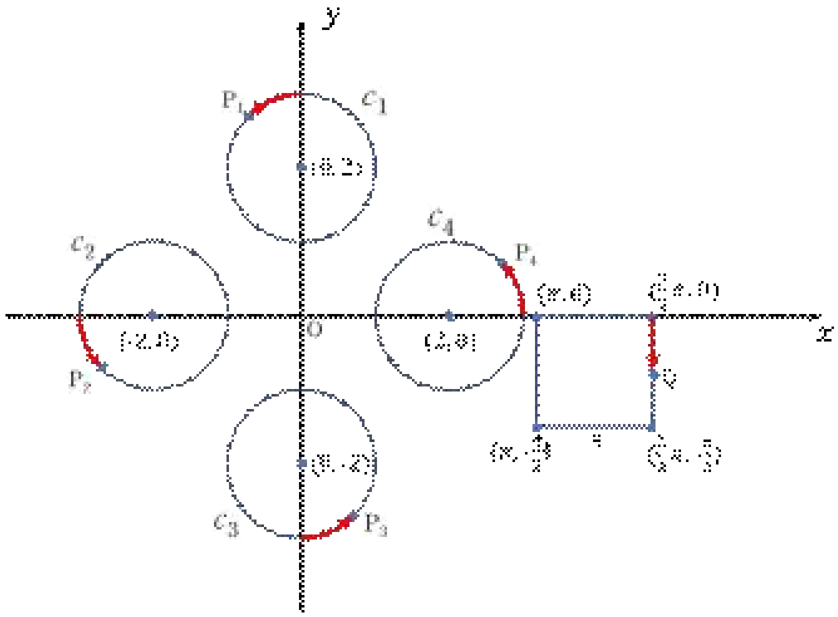
$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[\ f(x)g(x)\ \Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

아래 그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 각각 $(0, 2)$, $(-2, 0)$, $(0, -2)$, $(2, 0)$이고 반지름의 길이가 1인 4개의 원 C_1, C_2, C_3, C_4와 꼭짓점이 $\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right), \left(\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(\pi, -\frac{\pi}{2}\right), (\pi, 0)$인 정사각형 S가 있다. 실수 $t\,(t \ge 0)$에 대하여 좌표평면 위를 이동하는 5개의 점 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4, \mathrm{Q}$는 다음과 같은 규칙을 따른다.

• 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{R}_1(0,3)$, $\mathrm{R}_2(-3,0)$, $\mathrm{R}_3(0,-3)$, $\mathrm{R}_4(3,0)$에 대하여 점 P_i는 $t = 0$일 때 점 R_i를 출발하여 $t\,(t > 0)$초 동안 원 C_i 위를 시계 반대 방향으로 t만큼 이동한다.

(단, $i = 1, 2, 3, 4$)

• 점 Q는 $t = 0$일 때 점 $\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$을 출발하여 $t\ (t > 0)$초 동안 정사각형 S 위를 시계 방향으로 t만큼 이동한다.



출발 후 t초가 경과했을 때,

- 두 점 P_1과 P_3 사이의 거리를 $\ell(t)$
- 사각형 $P_1P_2P_3P_4$의 넓이를 $A(t)$
- 삼각형 P_1P_3Q의 무게중심의 x좌표를 $f(t)$

라 하자.

[논제 1] $a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ell(t))^4 dt - 40\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ell(t))^2 dt + 200\pi$라 하자.

$0 < t < a$에서 함수 $A(t)$의 모든 극값의 합을 구하시오. (20점)

[논제 2] $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} A(t)(f(t))^2 dt - 10\int_0^{\pi} (f(t))^2 dt$의 값을 구하시오. (25점)

3. 출제 의도

▹[논제 1] 매개변수를 이해하고 극값을 판정할 수 있는지를 평가

▹[논제 2] 정적분의 성질과 부분적분법을 활용할 수 있는지를 평가

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

<table>
<tr><th colspan="2">문항 및 제시문</th><th>관련 성취기준</th></tr>
<tr><td rowspan="2">제시문
(가, 나, 다)</td><td>교육과정</td><td>[수학 II] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용
- [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법
- [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.

[미적분] - (3)적분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 적분법
- [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다</td></tr>
<tr><td>성취기준·성취수준</td><td>[수학 II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용
- [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

[미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법
- [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.

[미적분] - (3)적분법 - (가) 여러 가지 적분법
- [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다</td></tr>
<tr><td rowspan="2">논제 2-1</td><td>교육과정</td><td>[수학 II] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용
- [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법
- [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·성취수준</td><td>[수학 II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용
- [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

[미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법
- [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">논제 2-2</td><td>교육과정</td><td>[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법
- [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.

[미적분] - (3)적분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 적분법
- [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·성취수준</td><td>[미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법
- [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.</td></tr>
</table>

문항 및 제시문		관련 성취기준
		[미적분] - (3)적분법 - (가) 여러 가지 적분법 - [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	이준열 외	천재교육	2020	83-96
	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2020	85-85, 137-139
	미적분	박교식 외	동아출판	2020	91-93, 140-145

5. 문항 해설

▹[논제 1] 매개변수 및 적분법를 활용하여 극값 판정의 문제를 해결할 수 있는지를 평가하기 위한 문제이다.

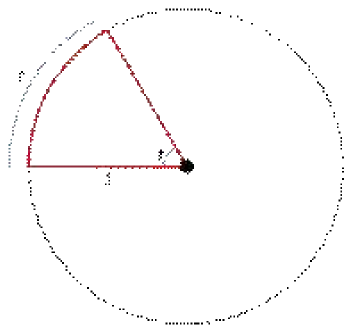
▹[논제 2] 매개변수, 정적분의 성질과 부분적분법을 활용하여 정적분의 값을 구할 수 있는지를 평가하기 위한 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	$\ell(t)$를 제시	5
	$A(t)$를 제시	5
	$a=64\pi$임을 제시	5
	정답을 제시	5
2-2	점 Q를 제시	7
	$f(t)$를 제시	8
	정답을 제시	10

7. 예시 답안

[논제 1] 반지름이 1이므로, 호의 길이가 t이면 중심각은 t이다.



실수 $t \geq 0$에 대하여 점 P_1, P_2, P_3, P_4의 좌표는

$$\begin{aligned} &P_1(-\sin t,\ 2+\cos t) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (\star) \\ &P_2(-2-\cos t,\ -\sin t) \\ &P_3(\sin t,\ -2-\cos t) \\ &P_4(2+\cos t,\ \sin t) \end{aligned}$$

이므로 $(\ell(t))^2 = (-2\sin t)^2 + (4+2\cos t)^2 = 20+16\cos t$ 이다.
그러므로

$$a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\ell(t))^2 - 20)^2 dt = 256\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 128\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t) dt = 64\pi$$

한편

$$\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4} = \overline{P_1P_4} = \sqrt{(-\sin t + 2 + \cos t)^2 + (2+\cos t + \sin t)^2} = \sqrt{10+8\cos t}$$

이므로 사각형 $P_1P_2P_3P_4$는 모든 변의 길이가 $\sqrt{10+8\cos t}$이고 두 대각선은 서로를 수직 이등분한다. 또한 마찬가지 방법으로 두 대각선의 길이는

$$\overline{P_1P_3} = \overline{P_2P_4} = \sqrt{20+16\cos t}$$

로 같으므로 사각형 $P_1P_2P_3P_4$는 정사각형이다. 따라서 $A(t) = 10+8\cos t$이고 $A(t)$는 미분가능한 함수이다. $A'(t) = -8\sin t = 0$에서 $t = \pi, 2\pi, \cdots, 63\pi$이다. 각 점의 좌우에서 $A'(t)$의 부호가 바뀌므로, $A(t)$의 극값은

$$A(t) = \begin{cases} 18, & t = 2\pi,\ 4\pi,\ \cdots,\ 62\pi \\ 2, & t = \pi,\ 3\pi,\ \cdots,\ 63\pi \end{cases}$$

그러므로 구간 $0 < t < 64\pi$에서의 함수 $A(t)$의 모든 극값의 합은 $18 \times 31 + 2 \times 32 = 622$이다.

[논제 2] 모든 $0 \leq t \leq \frac{3}{2}\pi$에 대하여 점 Q의 좌표는

$$\begin{cases} Q\left(\frac{3\pi}{2}, -t\right), & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ Q\left(2\pi - t, -\frac{\pi}{2}\right), & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \\ Q\left(\pi, t - \frac{3\pi}{2}\right), & \pi \leq t \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (\star\star)$$

그러므로, ($\star$)과 ($\star\star$)을 이용하면 함수 $f(t)$는

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{3}t + \frac{2\pi}{3}, & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \\ \frac{\pi}{3}, & \pi \leq t \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

따라서,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} A(t)(f(t))^2 dt - 10\int_0^{\pi} (f(t))^2 dt$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} A(t)(f(t))^2 dt + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} A(t)(f(t))^2 dt - 10\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (f(t))^2 dt - 10\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(t))^2 dt$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} A(t)(f(t))^2 dt - 10\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (f(t))^2 dt + \frac{\pi^2}{9}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (10+8\cos t)dt - \frac{5}{4}\pi^3$$

먼저

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} A(t)(f(t))^2 dt - 10\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (f(t))^2 dt$$
$$= \frac{8}{9}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (t-2\pi)^2 \cos t dt$$
$$= \frac{8}{9}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (t^2 - 4\pi t + 4\pi^2)\cos t dt$$

여기서,

$$\int t^2 \cos t dt = t^2 \sin t + 2t\cos t - 2\sin t + c_1, \qquad \int t\cos t dt = t\sin t + \cos t + c_2$$

이므로 (c_1, c_2는 적분상수)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} A(t)(f(t))^2 dt - 10\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (f(t))^2 dt$$
$$= \frac{8}{9}[t^2\sin t + 2t\cos t - 2\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{32\pi}{9}[t\sin t + \cos t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{32\pi^2}{9}[\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$= \frac{16}{9} + \frac{16}{9}\pi - 2\pi^2$$

또한

$$\frac{\pi^2}{9}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (10+8\cos t)dt = \frac{\pi^2}{9}(5\pi + 8[\sin t]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}) = \frac{5}{9}\pi^3 - \frac{8}{9}\pi^2$$

그러므로

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} A(t)(f(t))^2 dt - 10\int_0^{\pi} (f(t))^2 dt = \frac{16}{9} + \frac{16}{9}\pi - 2\pi^2 + \frac{5}{9}\pi^3 - \frac{8}{9}\pi^2 - \frac{5}{4}\pi^3$$
$$= \frac{16}{9} + \frac{16}{9}\pi - \frac{26}{9}\pi^2 - \frac{25}{36}\pi^3$$