[준킬러][미적] 2급수2

06 미적 02 급수

01 급수의 성질 및 계산

03 소거형 급수1 (분배 후 소거)

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 09월 19

1. 첫째항과 공차가 모두 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

$$b_n = \frac{a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n}}{a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}}$$

이때, $\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1} - b_n)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

06 미적 02 급수

01 급수의 성질 및 계산

05 소거형 급수3 (부분분수)

[출처] 2010 모의_공공 사관학교 고3 07월 28

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n(n+1)(n+2)} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[준킬러][미적] 2급수2

[출처] 2013 모의_공공 경찰대 고3 07월 16

3. 첫째항이 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{10}-a_2=4$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}$의 값은?

① $\frac{1}{21}$ ② $\frac{2}{21}$ ③ $\frac{1}{7}$

④ $\frac{4}{21}$ ⑤ $\frac{5}{21}$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 09월 21

4. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n}$ 은 일정한 값을 가진다.
>
> (나) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)a_n}=\frac{1}{10}$

a_{10}의 값은?

① 190 ② 192 ③ 194

④ 196 ⑤ 198

06 미적 02 급수

02 등비급수의 성질 및 계산

01 등비급수의 수렴조건1 (공비의 범위)

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고2 09월 30

5. 다음 두 조건을 만족시키는 모든 정수 r의 값의 합을 구하시오.

(가) 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-5}{8}\right)^{n}$이 수렴한다.

(나) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-7^{n}+2}{r^{n}+7^{n+1}+2^{n-1}}=-\frac{1}{7}$

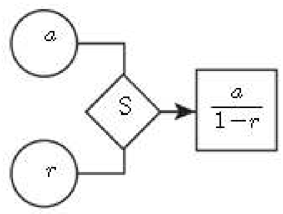
06 미적 02 급수

02 등비급수의 성질 및 계산

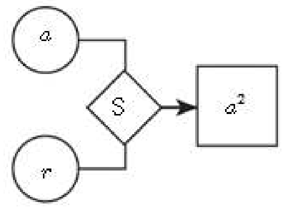
03 등비급수의 계산1 (기본)

[출처] 2005 모의_공공 교육청 고2 11월 8

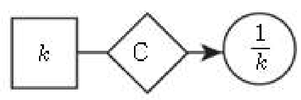
6. 두 실수 a, r에 대하여 무한등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$이 수렴하면 [그림 1], $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$이 발산하면 [그림 2]와 같이 나타내고, 0이 아닌 실수 k에 대하여 $|k|\le 1$인 경우 [그림 3], $|k|>1$인 경우에는 [그림 4]와 같이 나타내기로 한다.



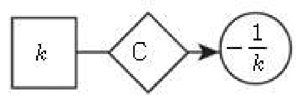
[그림 1]



[그림 2]

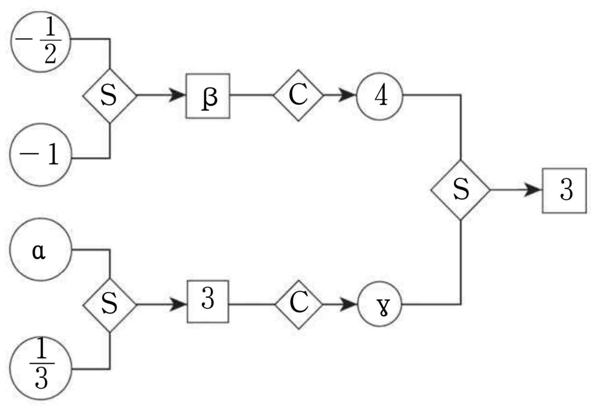


[그림 3]



[그림 4]

아래 그림의 α, β, γ에 대하여 $\alpha+\beta+\gamma$의 값은?



① $\frac{23}{12}$ ② $\frac{25}{12}$ ③ $\frac{9}{4}$

④ $\frac{29}{12}$ ⑤ $\frac{31}{12}$

06 미적

02 급수

02 등비급수의 성질 및 계산

04 등비급수의 계산2 (등비수열의 일반항)

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 06월 12

7. 수열 $\{a_n\}$이 $7a_1+7^2a_2+\cdots+7^na_n=3^n-1$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^{n-1}}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{9}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 21

8. 임의의 자연수 $p,\ q,\ r$에 대하여, 수열 $\{a_n\}$은

$$a_1=10,\ a_p+a_q+a_r=a_{p+q+r}$$

를 만족하고, 수열 $\{b_n\}$은

$$b_1=\frac{3}{5},\ b_pb_q=b_{p+q}$$

를 만족한다. 이때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_nb_n}{n}$의 값을 구하시오.

[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 09월 28

[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 09월 28

9. 첫째항이 12이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) $b_1 = 1$
>
> (나) $n \geq 1$일 때, b_{n+1}은 점 $\mathrm{P}_n\left(-b_n, {b_n}^2\right)$을 지나고 기울기가 a_n인 직선과 곡선 $y = x^2$의 교점 중에서 P_n이 아닌 점의 x좌표이다.

$\lim_{n \to \infty} b_n$의 값을 구하시오.

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 06월 26

10. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\log a_n$의 소수부분과 $\log a_{n+1}$의 소수부분은 서로 같다.
>
> (나) $1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < 100$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 500$일 때, a_1의 값을 구하시오.

06 미적 02 급수

02 등비급수의 성질 및 계산

05 등비급수의 계산3 (삼각함수)

[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 13

[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 11월 13

11. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{(n-1)\pi}{2},\ b_n = \frac{1+(-1)^{n-1}}{2^n}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 모든 자연수 k에 대하여 $a_{3k} < 0$이다.

ㄴ. 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k-1} + b_{4k-1} = 0$이다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{3}{5}\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

06 미적 02 급수

02 등비급수의 성질 및 계산

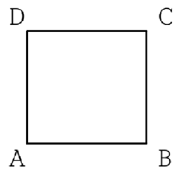
07 등비급수의 계산5 (합의 해석)

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 09월 29

12. 첫째항과 공비가 모두 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + m\sum_{n=2}^{\infty} a_n = 0$을 만족시키는 자연수 m의 최솟값을 N이라 할 때, $10N$의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 경찰대 고3 07월 16

13. 양의 실수 t에 대하여 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD 위의 점 P_0, P_1, P_2, P_3, $\cdots$ 은 다음과 같은 규칙을 따라 정해진다.



(규칙 1) $\mathrm{P}_0=\mathrm{A}$

(규칙 2) 자연수 n에 대해 점 P_{n-1}에서 점 P_n까지 정사각형 ABCD의 변을 반시계방향으로 따라가는 경로의 길이는 t^{n-1}이다.

다음을 만족시키는 실수 k의 최솟값은?

$k<t<\dfrac{39}{40}$인 t에 의해 정해지는 점 P_0, P_1, P_2, P_3, $\cdots$ 중에서 무수히 많은 점들이 변 DA 위에 있다.

① $\dfrac{30}{31}$ ② $\dfrac{32}{33}$ ③ $\dfrac{34}{35}$

④ $\dfrac{36}{37}$ ⑤ $\dfrac{38}{39}$

06 미적 02 급수

02 등비급수의 성질 및 계산

08 등비급수의 계산6 (순환소수)

[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 09월 9

[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 9

14. 순환소수로 이루어진 수열 $\{a_n\}$의 각 항이 $a_1=0.\dot{1}$, $a_2=0.\dot{1}\dot{0}$, $a_3=0.\dot{1}0\dot{0}$, $\cdots$, $a_n=0.\dot{1}\underbrace{00\cdots0\dot{0}}_{0\text{은 } n-1\text{개}}$, $\cdots$ 일 때,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$의 값은?

① $\dfrac{2}{3}$ ② 1 ③ $\dfrac{4}{3}$

④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ 2

[출처] 2012 모의_공공 사관학교 고3 07월 27

15. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 수열 $\{a_n\}$은 집합 A의 원소로 이루어진 수열이다. 이 수열이 등식

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}=\frac{104}{333}$$

를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{5^n}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

06 미적 02 급수

03 급수의 활용

01 급수의 진위판정

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 07월 18

16. 자연수 n에 대하여 함수 $y=\log_c|x|$의 그래프와 직선 $y=n$의 교점의 x좌표를 각각 a_n, $b_n\,(a_n>b_n)$이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $a_n+b_n=0$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{c}{1-c}$이다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 발산한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

06 미적 02 급수

03 급수의 활용

02 일반급수의 활용1 (대수 및 방부등식)

[출처] 2006 모의_공공 교육청 고2 09월 29

17. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = \frac{1}{4}$이고

$$na_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k \,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족한다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n S_{n+2}}$의 값을 구하시오.

06 미적 02 급수

03 급수의 활용

03 일반급수의 활용2 (함수 및 도형)

[출처] 2001 모의_공공 사관학교 고3 07월 19

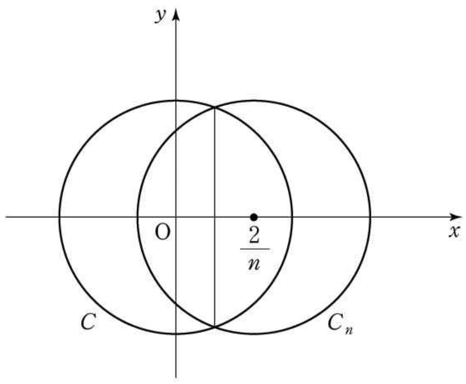
18. 자연수 n에 대하여 원 $(x-2n)^2 + y^2 = 1$과 원점을 지나는 직선이 제 1사분면에서 접할 때, 이 직선의 기울기를 a_n이라고 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ 2

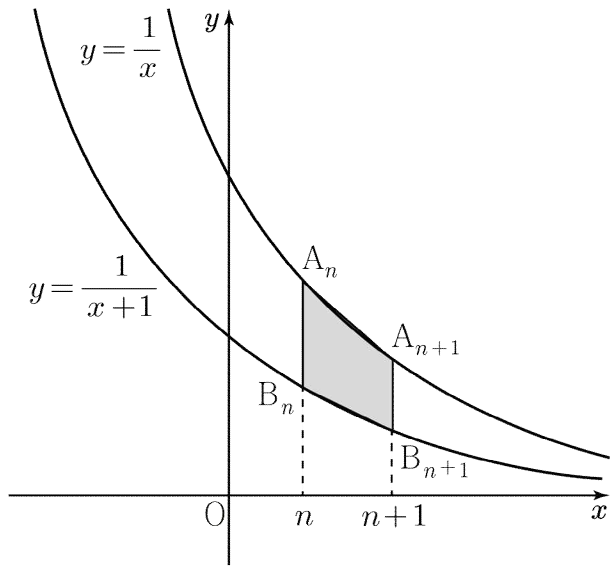
[출처] 2007 모의_공공 평가원 고3 11월 24

19. $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 C를 x축 방향으로 $\frac{2}{n}$ 만큼 평행이동 시킨 원을 C_n이라 하자. 원 C와 원 C_n의 공통현의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(nl_n)^2} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2007 모의_공공 사관학교 고3 07월 28

20. 두 곡선 $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x+1}$과 직선 $x=n$ (n은 자연수)이 만나는 점을 각각 A_n, B_n이라 하고, 사각형 $\mathrm{A_nB_nB_{n+1}A_{n+1}}$의 넓이를 S_n이라 하자. 이 때, $100\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하시오.



[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 23

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 04월 23

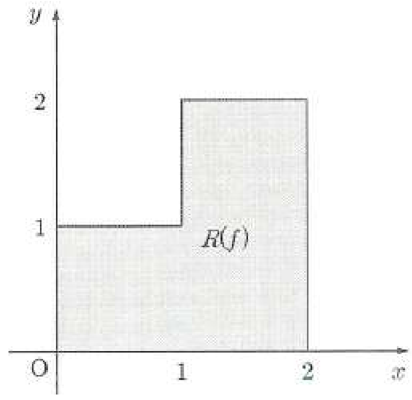
21. 좌표평면 위의 두 점 A(0, 0), B(5, 0)과 1 보다 큰 자연수 n에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PB}} = 1 : n$을 만족하는 점 $\mathrm{P}(x, y)$들의 집합을 T_n이라 하자. 집합 T_n의 임의의 두 원소 P, Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최댓값을 $M(n)$이라고 할 때, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{10M(n)}{n}$의 값을 구하시오.

[출처] 2010 모의_공공 경찰대 고3 07월 25

22. 좌표평면에서 함수 $y=f(x)$의 그래프에 있는 각 점과 그 점에서 x축에 내린 수선의 발을 연결하는 선분으로 이루어지는 영역을 $R(f)$라 하자.
예를 들어 $f(x)=[x]+1\,(0<x<2)$인 경우에 $R(f)$는 다음 그림의 어두운 부분이다. 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]+2}\quad(0<x<1)$$

일 때, 영역 $R(g)$의 넓이는?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 가장 큰 정수이다.)



① $\frac{7}{36}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{5}{18}$ ⑤ $\frac{11}{36}$

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고2 11월 13

23. 모든 자연수 n에 대하여 좌표평면 위에 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1의 좌표는 $(1, 1)$이다.

(나) 점 P_n의 x좌표는 n이다.

(다) 두 점 P_n, P_{n+1}을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2^n}$이다.

두 직선 $x=n$, $x=n+1$과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$, x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 a_n이라 하자. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-\alpha)$가 수렴할 때, 상수 α의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2

④ $\frac{9}{4}$ ⑤ 3

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 11월 14

24. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=\begin{cases} x^3 & (0 \le x < 1) \\ -x^2+2x & (1 \le x < 2) \end{cases}$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.

자연수 n에 대하여 직선 $y=\frac{1}{n}x$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a_n \times a_{n+2}}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 03월 21

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 집합

$$A=\{x \mid x^2-1<a<x^2+2x,\ x\text{는 자연수}\}$$

가 공집합이 되도록 하는 자연수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

예를 들어, $a=3$은 $x^2-1<a<x^2+2x$를 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않는 첫 번째 수이므로 $a_1=3$이다.

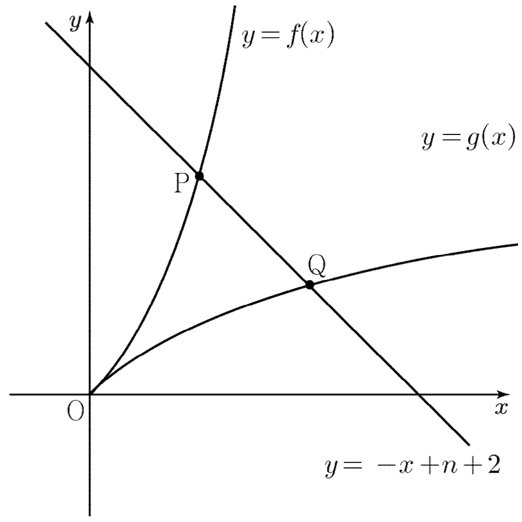
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1

④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 06월 29

26. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)=x^2+nx\,(x\ge 0)$의 역함수를 $g(x)$라 하고, 직선 $y=-x+n+2$와 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 POQ의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{50}{S_n}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



06 미적 02 급수

03 급수의 활용

04 등비급수의 활용1 (대수 및 방부등식)

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 20

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 09월 20

27. 다음 등식을 만족하는 소수 p는 2개 존재한다.

$$\frac{1}{p}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{6^{2n-1}}+\frac{b}{6^{2n}}\right)=\frac{a}{6}+\frac{b}{6^2}+\frac{a}{6^3}+\frac{b}{6^4}+\cdots$$

(단, $0\le a<6$, $0\le b<6$, a와 b는 정수이다.)

위 등식을 만족하는 두 소수의 합을 구하시오.

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 07월 21

28. $\log_{10}x=[\log_{10}x]$를 만족하는 $0<x<1$인 모든 x값들의 합을 S라 할 때, $99S$의 값을 구하시오.
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)

[출처] 2008 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

[출처] 2008 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

29. $f(x)=\log_2 x$라 할 때, $0<x<1$에서 방정식

$$\log_2\left[\frac{f(x)}{[f(x)]}\right]=0$$

을 만족시키는 모든 x의 값을 가장 큰 수부터 차례대로 나열한 것을 a_1, a_2, a_3, $\cdots$이라 하자. 이 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{3}{4}$

④ 1　⑤ 2

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고2 11월 10

30. 3×2^n (n은 자연수)의 모든 양의 약수

$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_{2n+2}$

에 대하여 $S(n)=\sum_{k=1}^{2n+2}\frac{1}{p_k}$ 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S(n)$의 값은?

① $\frac{2}{3}$　② $\frac{4}{3}$　③ 2

④ $\frac{8}{3}$　⑤ $\frac{10}{3}$

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고2 09월 29

31. 자연수 n에 대하여 2^n 이하의 자연수 중에서 2^n과 서로소인 모든 자연수의 합을 S_n이라 하자. 이 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{S_n}$의 값을 구하시오.

06 미적　02 급수

03 급수의 활용

05 등비급수의 활용2 (함수 및 도형)

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 09월 10

32. 원 $x^2+y^2=\frac{1}{2^n}$에 대하여 기울기가 -1이고 제 1사분면을 지나는 접선이 x축과 만나는 점의 좌표를 $(a_n,\ 0)$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은?

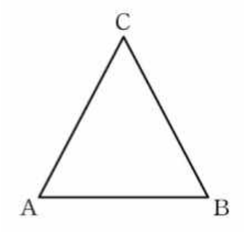
① 2　② $2+\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{2}$

④ 4　⑤ $4+\sqrt{2}$

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 16

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 06월 16

33. 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. 양수 r에 대하여 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.



(가) 점 P_1은 꼭짓점 A이다.

(나) 점 P_{n+1}은 점 P_n에서 정삼각형 ABC의 변을 따라 시계 반대 방향으로 r^n만큼 이동한 점이다.

집합 S를 $S=\{P_n | n$은 자연수$\}$라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $r=2$이면, 점 P_3은 꼭짓점 C이다.

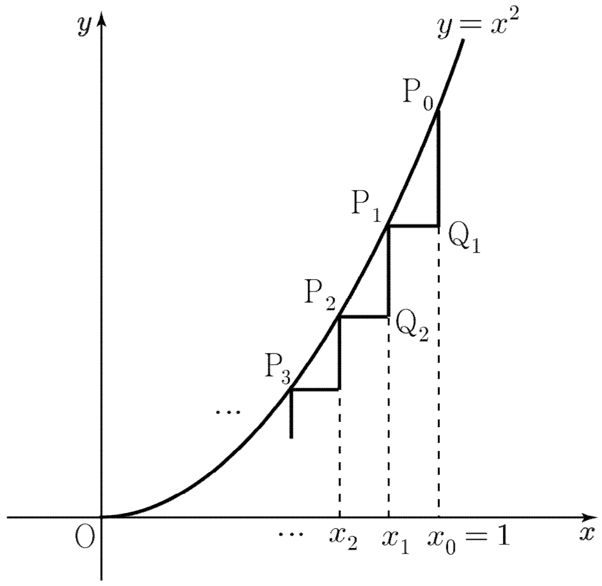
ㄴ. $r=\frac{4}{5}$이면, 변 CA 위에 S의 원소가 무수히 많다.

ㄷ. $0<r<\frac{1}{2}$이면, 변 AB 위에 S의 원소가 무수히 많다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

[출처] 2005 모의_공공 교육청 고3 03월 22

34. $x_0=1,\ x_1=\frac{3}{4},\ x_2=\frac{5}{8},\ \cdots,\ x_n=\frac{2^n+1}{2^{n+1}},\ \cdots$ 에 대하여 좌표평면 위에 점 $\mathrm{P}_0(1,1)$과 $\mathrm{P}_n(x_n, x_n^2)$, $\mathrm{Q}_n(x_{n-1}, x_n^2)(n=1,2,3,\cdots)$을 그림과 같이 나타낸다. 무한급수 $\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_1}+\overline{Q_1P_1}+\overline{P_1Q_2}+\overline{Q_2P_2}+\overline{P_2Q_3}+\cdots$의 합을 S라 할 때 $100S$의 값을 구하시오.



[출처] 2008 모의_공공 경찰대 고3 07월 24

35. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}(3^x-3^{-x})$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

다음을 만족시키는 x의 값 전체의 곱은?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{g(x)g(-x)\}^n=-\frac{1}{5}$$

① $-\frac{1}{5}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{3}$

④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ -1

[출처] 2011 모의_공공 경찰대 고3 07월 13

36. 점 A_n의 좌표가 $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\cos\frac{n\pi}{3},\ \left(\frac{3}{4}\right)^n\sin\frac{n\pi}{3}\right)$일 때,

$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{A_nA_{n+1}}$의 값은?

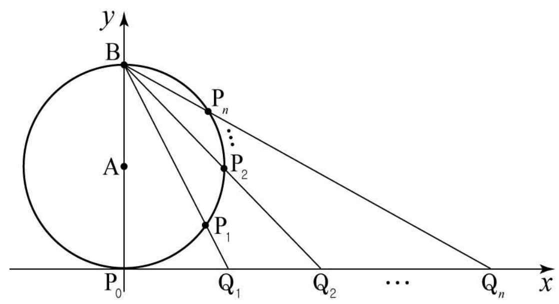
① $\frac{3\sqrt{13}}{4}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\frac{5\sqrt{13}}{4}$

④ $\frac{3\sqrt{13}}{2}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{13}}{4}$

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 07월 16

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 07월 16

37. 그림과 같이 중심이 $A(0,1)$이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P_n과 x축 위의 점 Q_n은 다음 규칙을 만족한다.



> (가) 점 P_0은 원점이고, 점 P_n은 제 1사분면의 점이다.
>
> (나) 호 $P_{n-1}P_n$의 길이를 l_n이라 할 때, $l_{n+1}=rl_n$이다.
>
> (다) 점 Q_n은 점 $B(0,2)$와 점 P_n을 이은 직선이 x축과 만나는 점이다.

$Q_2(2,\ 0)$이고 $\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{8}{15}\pi$일 때, 상수 r의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[출처] 2014 모의_공공 경찰대 고3 07월 10

38. x축 위의 점 $\mathrm{A}_n(x_n,\ 0)$에 대하여 함수 $f(x)=4x^2$의 그래프 위의 점 $\mathrm{B}_n(x_n,\ f(x_n))$에서 접선이 x축과 만나는 점을 $\mathrm{A}_{n+1}(x_{n+1},\ 0)$이라 하자. 삼각형 $\mathrm{A_nB_nA_{n+1}}$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (단, $x_1=1$)

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{6}{5}$

④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{8}{7}$

06 미적 02 급수

03 급수의 활용

06 등비급수의 활용3 (실생활)

[출처] 2004 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 17

[출처] 2004 모의_공공 교육청 고3 10월 17

39. 어느 장학재단은 14억 원의 기금을 조성하였다. 매 년 초에 기금을 운용하여 연말까지 20%의 이익을 내고, 기금과 이익을 합한 금액의 40%를 매년 말에 장학금으로 지급하려 한다. 장학금으로 지급하고 남은 금액을 기금으로 하여 기금의 운용과 장학금의 지급을 매년 이와 같은 방법으로 실시할 계획이다. 이 계획대로 해마다 지급한 장학금의 총액의 극한값은? (단, 단위는 억 원이다.)

① 24 ② 26 ③ 28

④ 30 ⑤ 32

[출처] 2005 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 17

[출처] 2005 모의_공공 교육청 고3 07월 17

40. K 보험사에는 다음과 같은 종신연금 상품이 있다.

> ○ 최초 가입 시 단 한번 납입한 1억 원을 연이율 5%, 1년 단위의 복리로 계산하여 10년 후의 원리합계를 연금 준비금으로 한다.
>
> ○ 가입하여 10년이 지난 후부터 매년 A 원씩 연금을 영구히 받는다.
>
> ○ n 번째의 연금 A 원을 연금 지급이 시작된 해의 가치로 환산하면 $\dfrac{\mathrm{A}}{(1+0.05)^{n-1}}$ 원이다.
>
> ○ 매년 받을 수 있는 연금을 연금 지급이 시작된 해의 가치로 환산하여 모두 더한 금액이 연금 준비금과 같아지도록 한다.

2005년 초에 이와 같은 종신연금에 가입했을 때, 2015년 초부터 매년 받을 수 있는 연금액은?
(단, $1.05^9 = 1.55$ 로 계산한다.)

① 675만원 ② 725만원 ③ 775만원
④ 825만원 ⑤ 875만원

06 미적

02 급수

03 급수의 활용

07 등비급수의 활용4 (급수로 정의된 함수)

[출처] 2011 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

41. 함수

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n x^{18}}{(9+x^{2p})^n}$$

에 대하여 $f(x)$ 가 실수전체의 집합에서 연속이기 위한 자연수 p 의 개수는?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[준킬러][미적] 2급수2(빠른 정답)

준킬러미적 2023.01.06

1. [정답] ②
2. [정답] 11
3. [정답] ②
4. [정답] ①
5. [정답] 18

6. [정답] ①
7. [정답] ①
8. [정답] 15
9. [정답] 19
10. [정답] 450

11. [정답] ⑤
12. [정답] 30
13. [정답] ⑤
14. [정답] ②
15. [정답] 103

16. [정답] ③
17. [정답] 12
18. [정답] ①
19. [정답] 19
20. [정답] 75

21. [정답] 75
22. [정답] ③
23. [정답] ③
24. [정답] ⑤
25. [정답] ②

26. [정답] 75
27. [정답] 12
28. [정답] 11
29. [정답] ④
30. [정답] ④

31. [정답] 12
32. [정답] ②
33. [정답] ②
34. [정답] 125
35. [정답] ③
36. [정답] ①
37. [정답] ③
38. [정답] ⑤
39. [정답] ①
40. [정답] ③

41. [정답] ④

[준킬러][미적] 2급수2(해설)

준킬러미적 2023.01.06

1) [정답] ②

[해설]

$a_n=2n$이므로 $a_{2n}=4n,\ a_{2n-1}=4n-2$

$$b_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}a_{2k}}{\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}4k}{\sum_{k=1}^{n}(4k-2)}=1+\frac{1}{n},$$

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=-1$$

2) [정답] 11

[해설]

$$\frac{2n+3}{n(n+1)(n+2)}=\frac{a}{n(n+1)}-\frac{b}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{a(n+2)-bn}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{(a-b)n+2a}{n(n+1)(n+2)}$$

$a-b=2,\ 2a=3$

$\therefore\ a=\frac{3}{2},\ b=-\frac{1}{2}$

그러면,

$$\frac{2n+3}{n(n+1)(n+2)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+3}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$$

$\therefore\ p+q=11$

3) [정답] ②

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10}-a_2=8d=4$

$\therefore\ d=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a_n=\frac{n+5}{2}\ (\because a_1=3)$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}a_{k+2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8}{(k+5)(k+6)(k+7)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}4\left(\frac{1}{(k+5)(k+6)}-\frac{1}{(k+6)(k+7)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}4\left(\frac{1}{42}-\frac{1}{(n+6)(n+7)}\right)$$

$$=\frac{2}{21}$$

4) [정답] ①

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

조건 (가)에 의하여

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n}=p\,(p\text{는 상수})$$

이고,

$$\frac{\frac{2n\{2a+(2n-1)d\}}{2}}{\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}}=p$$

$4a+4dn-2d=2ap+dnp-dp$

$(4d-dp)n+(4a-2d-2ap+dp)=0\cdots(\bigstar)$

$(\bigstar)$이 자연수 n에 대한 항등식이므로

$4d-dp=0,\ 4a-2d-2ap+dp=0$

$d\neq 0$ 이므로 $p=4,\ d=2a$

$a_n=a+(n-1)\times 2a=a(2n-1)$

조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{a}$$

$\frac{1}{a}=\frac{1}{10}$ 이므로 $a=10,\ d=20$

따라서 $a_n=20n-10$ 이므로 $a_{10}=190$

5) [정답] 18

[해설]

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-5}{8}\right)^n$이 수렴하려면

$-1<\frac{r-5}{8}<1$이므로 $-3<r<13$

(ⅰ) $-3<r<7$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-7^n+2}{r^n+7^{n+1}+2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{r\left(\frac{r}{7}\right)^n-1+\frac{2}{7^n}}{\left(\frac{r}{7}\right)^n+7+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n}=-\frac{1}{7}$$

(ⅱ) $r=7$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^{n+1}-7^n+2}{7^n+7^{n+1}+2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6\times 7^n+2}{8\times 7^n+2^{n-1}}=\frac{3}{4}$$

(ⅲ) $7<r<13$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{r-\left(\frac{7}{r}\right)^n+\frac{2}{r^n}}{1+7\left(\frac{7}{r}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{r}\right)^n}=r$

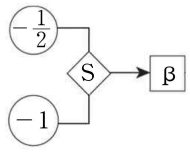
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $-3<r<7$

따라서 모든 정수 r의 값의 합은 18이다.

6) [정답] ①

[해설]

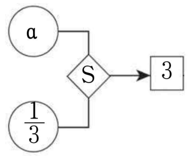
(ⅰ)



에서 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)^{n-1}$은 발산하므로

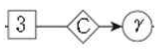
[그림2]에 의하여 $\beta=\frac{1}{4}$

(ⅱ)



에서 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 은 수렴하므로

[그림1]에 의하여 $\frac{\alpha}{1-\frac{1}{3}}=3\ \therefore \alpha=2$

(ⅲ)  에서 $|3|>1$ 이므로

[그림4]에 의하여 $\gamma=-\frac{1}{3}$ 따라서, $\alpha+\beta+\gamma=\frac{23}{12}$

7) [정답] ①

[해설]

$7a_1+7^2a_2+\cdots+7^{n-1}a_{n-1}+7^na_n=3^n-1$ …… ㉠

$7a_1+7^2a_2+\cdots+7^{n-1}a_{n-1}=3^{n-1}-1$ …… ㉡

㉠−㉡에서

$7^na_n=3^n-3^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}$

$\therefore\ a_n=\frac{2\cdot 3^{n-1}}{7^n}\ \ (n\geq 2)$

$n=1$ 일 때, $7a_1=3^1-1$ 에서 $a_1=\frac{2}{7}$ 이므로

$a_n = \dfrac{2 \cdot 3^{n-1}}{7^n}$ $(n \geq 1)$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n-1}} \times \frac{2 \cdot 3^{n-1}}{7^n} \right)$

$= \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{7^n} = \frac{\frac{2}{7}}{1-\frac{1}{7}} = \frac{1}{3}$

8) [정답] 15

[해설]

$p=q=1$, $r=n$ 이면 $2a_1 + a_n = a_{n+2}$ 이므로

$a_{n+2} = a_n + 20$

$a_1 = 10$ 이므로 $a_3 = 30$, $a_5 = 50$

$a_5 = a_3 + 2a_1$ 이므로 $a_2 = 20$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 10 인 등차수열이다.

$a_n = 10n$ …①

수열 $\{b_n\}$에서 $p=1$ 을 대입하여 정리하면

$b_n = \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$ …②

①, ②에 의하여

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n \times (\frac{3}{5})^n}{n} = 10 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 15$

9) [정답] 19

[해설]

$a_n = 12 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$

점 P_n을 지나고 기울기가 a_n인 직선의 방정식은

$y - b_n^2 = a_n(x + b_n)$ 즉, $y = a_n x + a_n b_n + b_n^2$

이 직선과 곡선 $y = x^2$의 교점의 x좌표는 방정식

$a_n x + a_n b_n + b_n^2 = x^2$ 즉,

$(x + b_n)(x - a_n - b_n) = 0$의 실근이다.

$\therefore$ $b_{n+1} = a_n + b_n$ $(\because b_{n+1} \neq -b_n)$

이때, $b_{n+1} - b_n = a_n$이므로 수열 $\{b_n\}$의 계차수열이 $\{a_n\}$이다.

$\therefore$ $b_n = b_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$

$\therefore$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} a_k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 12\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

$= 1 + \dfrac{12}{1-\frac{1}{3}} = 1 + 18 = 19$

10) [정답] 450

[해설]

$\log a_n$의 가수가 $\log a_{n+1}$의 가수와 같으므로

$\log a_n - \log a_{n+1}$은 정수이다. $1 < \dfrac{a_n}{a_{n+1}} < 100$

양변에 log를 취하면 $0 < \log a_n - \log a_{n+1} < 2$이므로

$\log a_n - \log a_{n+1} = 1$이다. $\therefore$ $a_{n+1} = \dfrac{1}{10} a_n$

따라서, $\{a_n\}$은 초항이 a_1이고 공비가 $\dfrac{1}{10}$인 등비수열이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-\frac{1}{10}} = 500$이므로 $a_1 = 450$

11) [정답] ⑤

[해설]

$n = 1, 2, 3, \cdots$을 대입하여 나열해 보면

$\{a_n\}$; $1, 0, -\dfrac{1}{2^2}, 0, \dfrac{1}{2^4}, 0, \cdots$

$\{b_n\}$; $1, 0, \dfrac{1}{2^2}, 0, \dfrac{1}{2^4}, 0, \cdots$

ㄱ. $a_6 = 0$이므로 거짓.

ㄴ. $a_{4k-1} + b_{4k-1} = -\dfrac{1}{2^{4k-2}} + \dfrac{1}{2^{4k-2}} = 0$ (참)

ㄷ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{4}{5}$

$\dfrac{3}{5}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{5}$ (참)

12) [정답] 30

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r \neq 0)$이라 하자.

$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = -\frac{a_1}{m}$이므로 $|r|<1 \cdots$㉠

$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \frac{a_2}{1-r} = -\frac{a_1}{m}$, $\frac{a_2}{a_1} = r$이므로 $m = 1 - \frac{1}{r}$

㉠에서 $\frac{1}{|r|} > 1$이므로 $|1-m| > 1 \Leftrightarrow m < 0$ 또는 $m > 2$

따라서 자연수 m의 최솟값 N은 3 그러므로 $10N = 30$

13) [정답] ⑤

[해설]

이동거리의 합(등비급수의 합) $S = \frac{1}{1-t}$의 값이

$4n+3 \leq \frac{1}{1-t} \leq 4n+4$ (n은 음이 아닌 정수)

일 때이다. 따라서 $\frac{4n+2}{4n+3} \leq t \leq \frac{4n+3}{4n+4}$

$\frac{4n+3}{4n+4} = \frac{39}{40}$이므로 $n=9$,

그러므로 k의 최솟값은 $\frac{38}{39}$

14) [정답] ②

[해설]

$a_n = 0.\dot{1}000\cdots0\dot{0} = \frac{100\cdots00}{99\cdots99} = \frac{10^{n-1}}{10^n - 1}$

$\frac{1}{a_n} = 10^n \frac{-1}{10^{n-1}} = 10 - \frac{1}{10^{n-1}}$

$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \left(10 - \frac{1}{10^n}\right) - \left(10 - \frac{1}{10^{n-1}}\right) = \frac{1}{10^n}(-1+10)$

$= \frac{9}{10^n}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1$

15) [정답] 103

[해설]

$\frac{104}{333} = \frac{312}{999} = 0.\dot{3}1\dot{2}$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = 0.\dot{3}1\dot{2}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{5^n} = 0.\dot{3}1\dot{2}_{(5)} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \cdots$

$= \frac{\frac{3}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^3}}{1 - \frac{1}{5^3}} = \frac{3 \times 5^2 + 1 \times 5 + 2}{5^3 - 1} = \frac{82}{124} = \frac{41}{62}$

16) [정답] ③

[해설]

$y = \log_c |x|$과 $y = n$의 교점의 x좌표를 구하면 $a_n = c^n$ 이고 $b_n = -c^n$이다. 즉, $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$은 공비가 c인 등비수열이다.

ㄱ. $a_n + b_n = c^n + (-c^n) = 0$ (참)

ㄴ. $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$ 이면 $0 < c < 1$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{c}{1-c}$ (참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$이 발산하면 수열 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$의 공비 $\frac{1}{c}$은 $\frac{1}{c} > 1$ 이므로 수열 $\{a_n\}$의 공비 c는 $0 < c < 1$이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다. (거짓)

17) [정답] 12

[해설]

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 이고 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 이므로

$na_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k$에서 $n(S_{n+1} - S_n) = S_n$

$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+1}{n}$ 의 양변의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$ 을 대입하여 변끼리 곱하면

$\frac{S_2}{S_1} \times \frac{S_3}{S_2} \times \frac{S_4}{S_3} \times \cdots \times \frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n-1}$

$\dfrac{S_n}{S_1} = n \quad \therefore \; S_n = nS_1 = na_1 = \dfrac{n}{4}$

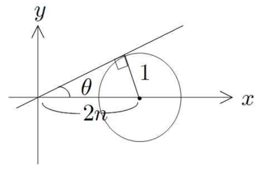
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n S_{n+2}} = 16\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = 16\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$

$\displaystyle= 8\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right) = 8\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = 12$

18) [정답] ①

[해설]

오른쪽 그림에서 접선의 기울기 a_n 은



$a_n = \tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1}}$

따라서,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4k^2-1}}\right)^2$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

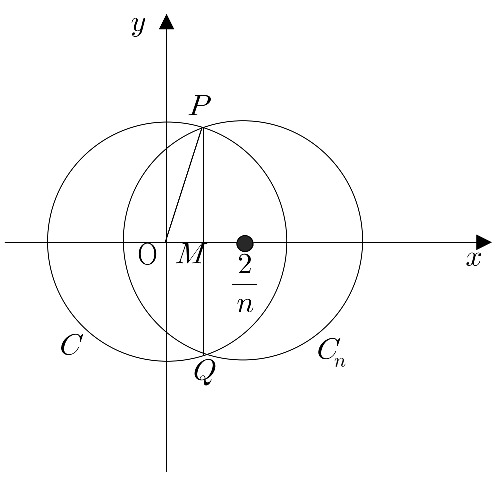
$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

$= \dfrac{1}{2}$

19) [정답] 19

[해설]



삼각형 POM은 직각삼각형이고

$\overline{OP} = 1,\; \overline{OM} = \dfrac{1}{n}$이므로 $\overline{PM} = \sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}$

$\therefore\; l_n = 2\overline{PM} = 2\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}$

$(nl_n)^2 = n^2 l_n^2 = n^2 \cdot 4 \cdot \dfrac{n^2-1}{n^2} = 4(n^2-1)$

$\displaystyle\therefore\; \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(nl_n)^2} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4(n^2-1)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{4(k^2-1)}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.$

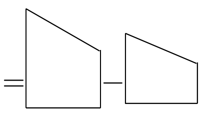
$\displaystyle\left.+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{16}$

$\therefore\; p+q = 16+3 = 19$

20) [정답] 75

[해설]

$S_n =$ 

$\displaystyle= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$\displaystyle\therefore\; \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4}$

$\displaystyle\therefore\; 100\sum_{n=1}^{\infty} S_n = 75$

21) [정답] 75

[해설]

$\sqrt{x^2+y^2} : \sqrt{(x-5)^2+y^2} = 1 : n$이므로

$\left(x+\dfrac{5}{n^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{5n}{n^2-1}\right)^2$이다.

T_n의 임의의 두 원소 P, Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최댓값

$M(n)=\dfrac{10n}{n^2-1}$이다.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{10M(n)}{n}=50\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=75$$

22) [정답] ③

[해설]

$\dfrac{1}{2}<x<1$일 때, $1<\dfrac{1}{x}<2$이므로 $\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$

$\therefore\ g(x)=\dfrac{1}{3}$

2이상의 자연수 n에 대하여

$\dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n}$일 때, $n\le\dfrac{1}{x}<n+1$이므로 $\left[\dfrac{1}{x}\right]=n$

$\therefore\ g(x)=\dfrac{1}{n+2}$

따라서 구간 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$에서 $R(g)$가 차지하는 영역의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}$

구간 $\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right]$에서 $R(g)$가 차지하는 영역의 넓이는

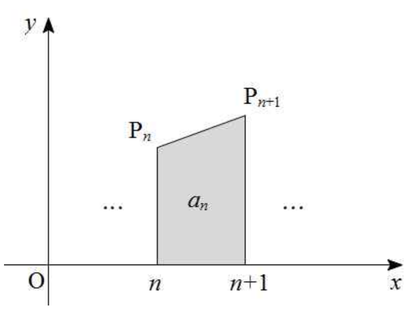
$\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\times\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

따라서 $R(g)$의 넓이는

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{4}$$

23) [정답] ③

[해설]



P_n의 y좌표를 y_n이라 하면

$y_n=1+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}$이다.

$$a_n=\frac{1}{2}(y_n+y_{n+1})$$
$$=\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}\right)$$
$$=2-\frac{3}{2^{n+1}}$$

이다. 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-\alpha)$가 수렴하면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-\alpha)=0$이고

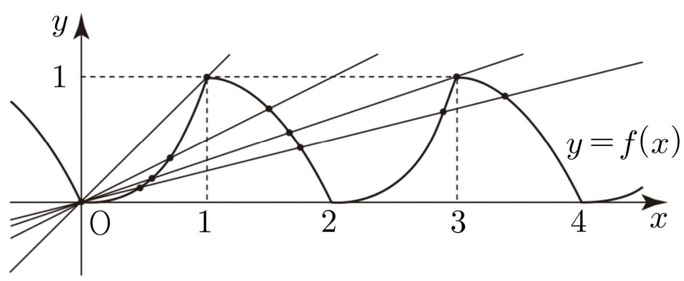
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=2$이다.

따라서 $\alpha=2$

24) [정답] ⑤

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{n}x$의 그래프는 다음과 같다.



위 그림에서 $a_1=2,\ a_2=3,\ a_3=4,\ a_4=5,\ \cdots$

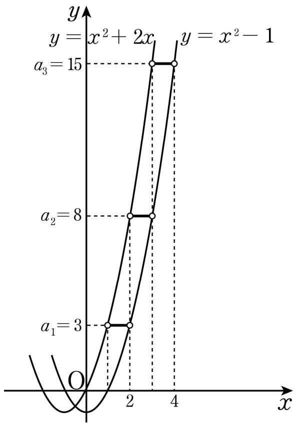
$\therefore a_n=n+1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a_n\times a_{n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+1)(n+3)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(k+1)(k+3)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{5}{6}$$

25) [정답] ②

[해설]

두 함수 $y=x^2+2x$, $y=x^2-1$의 그래프는 그림과 같다.



자연수 1, 2는 $x=1$일 때 $1^2-1=0$과

$1^2+2\times1=3$ 사이의 수이다. 이때 $1\in A$이므로 $A\neq\varnothing$이다.

그러므로 1, 2는 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 될 수 없다.

그런데 $a=3$일 때, 부등식 $x^2-1<a<x^2+2x$를 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않으므로 $A=\varnothing$이다. 즉, $a_1=3$

자연수 4, 5, 6, 7은 $x=2$일 때 $2^2-1=3$과 $2^2+2\times2=8$ 사이의 수이다. 이 때 $2\in A$이므로 $A\neq\varnothing$이다. 따라서 4, 5, 6, 7은 수열 $\{a_n\}$의

둘째 항이 될 수 없다.

그런데 위 그림에서 $x^2-1<8<x^2+2x$를 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않으므로 $a_2=8$이다.

마찬가지로 자연수 9, 10, 11, 12, 13, 14는

$x=3$일 때 $3^2-1=8$과 $3^2+2\times3=15$ 사이의 수이다. 이 때 $3\in A$이므로 $A\neq\varnothing$이다.

따라서 9, 10, 11, 12, 13, 14는 수열 $\{a_n\}$의

셋째 항이 될 수 없다.

그런데 위 그림에서 $x^2-1<15<x^2+2x$를 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않으므로 $a_3=15$이다.

$\vdots$

위의 과정을 통해 집합 A를 공집합이 되도록 하는 자연수 a는 k^2-1 또는 k^2+2k (k는 자연수)의 값임을 알 수 있다.

그런데 $x=k$(k는 자연수)일 때 k^2+2k의 값은

$x=k+1$(k는 자연수)일 때 $(k+1)^2-1$의 값과

같고, $x=1$일 때, $1^2-1=0$은 자연수가 아니므로

$x=k$(k는 자연수)일 때 k^2+2k인 자연수를 나열하면 된다.

따라서 n번째 나열된 수는 n^2+2n이므로

$a_n=n^2+2n$이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-0-0\right)=\frac{3}{4}$$

[다른풀이]

$x^2-1<a<x^2+2x$를 정리하면

$x^2<a+1<x^2+2x+1$

$x^2<a+1<(x+1)^2$

$a+1$이 자연수 x에 대해 x^2 또는 $(x+1)^2$이면 부등식 $x^2-1<a<x^2+2x$의 해 중 자연수는 존재하지 않으므로 A가 공집합이다.

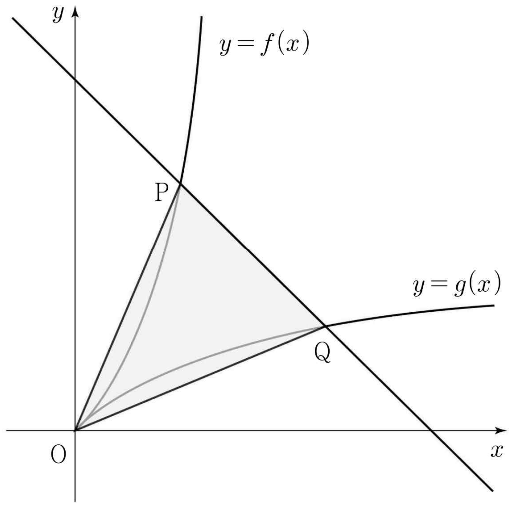
이 때, $a+1=k^2$(k는 2 이상의 자연수)를 만족시키는 자연수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것이 수열 $\{a_n\}$이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{3}{4}$$

26) [정답] 75

[해설]



점 P는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선

$y=-x+n+2$와의 교점이다.

$$x^2+nx=-x+n+2$$

$$x^2+(n+1)x-(n+2)=0$$

$$(x-1)(x+n+2)=0$$

$$x=1\ (\because x\geq 0)$$

따라서 $\mathrm{P}(1,\ n+1)$이다. 점 Q는 점 P와 직선 $y=x$에 대한

대칭인 점이므로

$$\mathrm{Q}(n+1,\ 1)$$

이다. 그러므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\{(\mathrm{n}+1)-1\}^2+\{1-(\mathrm{n}+1)\}^2}$

$$=\sqrt{2n^2}$$

$$=\sqrt{2}\,n$$

이고 점 O에서 직선 $y=-x+n+2$까지의 거리(d)는

$$d=\frac{|n+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{n+2}{\sqrt{2}}$$

이다. 따라서 삼각형 POQ의 넓이 S_n은

$$S_n=\frac{1}{2}\times\frac{n+2}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}\,n=\frac{n(n+2)}{2}$$

이다. 그러므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{50}{S_n}=50\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}$$

$$=50\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

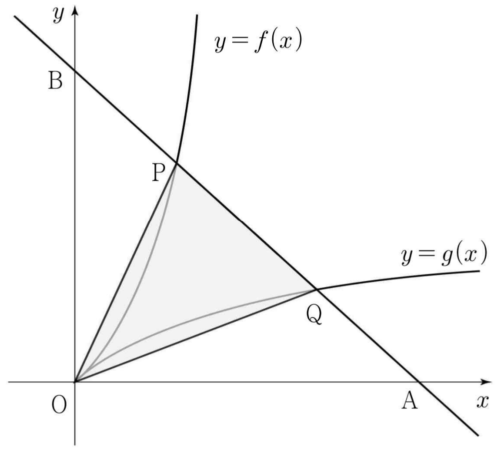
$$=50\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=50\times\frac{3}{2}$$

$$=75$$

[다른 풀이]



삼각형 POQ의 넓이를 다음과 같이 구할 수도 있다.

(삼각형 POQ의 넓이)

= (삼각형 OAB의 넓이)-2(삼각형 OAQ의 넓이)

$$=\frac{1}{2}(n+2)^2-2\times\left\{\frac{1}{2}\times(n+2)\times1\right\}$$

$$=\frac{n(n+2)}{2}$$

27) [정답] 12

[해설]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{6^{2n-1}}+\frac{b}{6^{2n}}\right)=\left(\frac{a}{6}+\frac{a}{6^3}+\frac{a}{6^5}+\ldots\right)+\left(\frac{b}{6^2}+\frac{b}{6^4}+\frac{b}{6^6}+\ldots\right)$$

$$=\frac{\frac{a}{6}}{1-\frac{1}{6^2}}+\frac{\frac{b}{6^2}}{1-\frac{1}{6^2}}=\frac{6a+b}{6^2-1}=\frac{6a+b}{35}=\frac{1}{p}$$

$$\therefore\ p=\frac{35}{6a+b}=\frac{5\times7}{6a+b}$$

따라서, p는 소수이므로 $6a+b=7$일 때 $p=5$이고, $6a+b=5$일 때 $p=7$이다. $\therefore\ 5+7=12$

28) [정답] 11

[해설]

$\log_{10}x=[\log_{10}x]$이므로 $\log_{10}x$의 가수는 0이다. 따라서 $\log_{10}x=n$(n은 음의 정수)

따라서 $x=\frac{1}{10},\ \frac{1}{10^2},\ \frac{1}{10^3},\ \cdots,\ \frac{1}{10^n},\ \cdots$

$$S=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots+\frac{1}{10^n}+\cdots=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{9}$$

$\therefore\ 99S=11$

29) [정답] ④

[해설]

로그함수의 개형을 이용하면 $0<x<1$ 인 경우에 함수 $f(x)$ 의 범위는 $f(x)<0$ 이다.

주어진 방정식이 성립하기 위해서

$$\left[\frac{f(x)}{[f(x)]}\right]=1,\ 1\leq\frac{f(x)}{[f(x)]}<2\cdots\ (1)$$

$f(x)<0$ 이므로 $f(x)$ 가 정수가 아닌 경우에 $[f(x)]<f(x)$ 이고 $0<\frac{f(x)}{[f(x)]}<1$ 이다. 따라서 부등식 (1)의 해는 $f(x)=\log_2 x$ 가 정수일 때, 즉

$$x=\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots$$

$$\therefore\ a_n=\frac{1}{2^n}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

30) [정답] ④

[해설]

$3\cdot2^n$ 의 양의 약수는 $1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,2^n,$

$3,\ 3\cdot2,\ 3\cdot2^2,\ \cdots,\ 3\cdot2^n$ 이므로

$$S(n)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot2}+\frac{1}{3\cdot2^2}+\cdots+\frac{1}{3\cdot2^n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}S(n)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{8}{3}$$

31) [정답] 12

[해설]

$$S_n=\{1+2+3+\cdots+(2^n-1)+2^n\}$$
$$-\{2+4+6+\cdots+(2^n-2)+2^n\}$$
$$=\frac{2^n(1+2^n)}{2}-\frac{2^{n-1}(2+2^n)}{2}$$
$$=2^{n-1}(2^n-2^{n-1})=4^{n-1}\ \therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{S_n}=\frac{9}{1-\frac{1}{4}}=12$$

32) [정답] ②

[해설]

기울기가 -1이고, 점 $(a_n,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=-(x-a_n),\ x+y-a_n=0$ ……………㉠

원 $x^2+y^2=\frac{1}{2^n}$이 직선 ㉠과 접하므로 원의 중심 (0, 0)에서 직선 ㉠과의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

$$\frac{|-a_n|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{\frac{1}{2^n}}\quad\therefore\ a_n=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2^n}}=\sqrt{\frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{2^{n-1}}}=1+\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2^2}}+\sqrt{\frac{1}{2^3}}+\ldots$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}=2+\sqrt{2}$$

33) [정답] ②

[해설]

ㄱ. $r=2$ 이면, 점P_2 는 꼭지점 C 이고,

점 P_3 는 꼭지점 B 이다.

ㄴ. $r=\frac{4}{5}$ 이면, 점P_2 는 점 A $=P_1$ 에서 $\frac{4}{5}$ 되는 지점의 점이고, 점P_3 는 앞의 점에서 $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ 되는 지점의 점이다.

계속하면 점P_n 이 움직인 거리는

$$\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\cdots=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}=4$$ (즉, 점B)에 가까이

가므로 변CA 위에 S 의 원소는 유한개이다.

ㄷ. $0<r<\frac{1}{2}$ 이면, 점P_2 는 점 A $=P_1$ 에서 r 되는 지점의

점이고, 점P_3 는 앞의 점에서 r^2 되는 지점의 점이다.
계속하면 점P_n 이 움직인 거리는

$$r+r^2+r^3+\cdots=\frac{r}{1-r}\left(0<\frac{r}{1-r}<1\right)$$

(즉, 점B)이므로 변 AB 위에 S 의 원소가 무수히 많다.

34) [정답] 125

[해설]

$S=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{P_nQ_{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{Q_nP_n}$ 이고,

$x_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}$ 이므로

$$\sum_{n=0}^{\infty}\overline{P_nQ_{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(x_n^{\ 2}-x_{n+1}^{\ 2}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{3}{4^{n+2}}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{3}{16}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{Q_nP_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_{n-1}-x_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

따라서, $S=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$이므로 $100S=125$

35) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)=\frac{1}{2}\left(3^x-3^{-x}\right)$의 역함수 $g(x)$는

$x=\frac{1}{2}\left(3^y-3^{-y}\right)$이므로

$2x=3^y-\frac{1}{3^y}$

$3^{2y}-2x\cdot 3^y-1=0$

3^y를 t로 치환하면 $t^2-2xt-1=0$

$t=x\pm\sqrt{x^2+1}$

$\therefore\ 3^y=x+\sqrt{x^2+1}\ \ (\because 3^y>0)$

$\therefore\ g(x)=\log_3\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

그런데,

$$g(-x)=\log_3\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$=\log_3\frac{\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\log_3\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$=-\log_3\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-g(x)$이므로

$g(x)\cdot g(-x)=g(x)\cdot\{-g(x)\}=-\{g(x)\}^2$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\{g(x)\cdot g(-x)\}^n=\frac{-\{g(x)\}^2}{1+\{g(x)\}^2}=-\frac{1}{5}$

$5\{g(x)\}^2=1+\{g(x)\}^2$

$g(x)=\pm\frac{1}{2}$

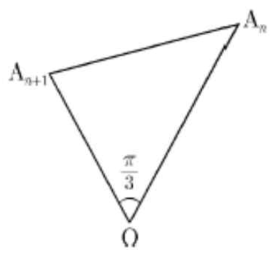
즉, $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로 $f\left(\pm\frac{1}{2}\right)=x$의 값을 구하면 된다.

따라서 $f\left(\pm\frac{1}{2}\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 조건을 만족시키는 x의 값 전체의 곱은

$-\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{3}$이다.

36) [정답] ①

[해설]



$\overline{OA_n}=\left(\frac{3}{4}\right)^n$이고 $\angle A_nOA_{n+1}=\frac{\pi}{3}$이므로

삼각형 OA_nA_{n+1}에서 코사인정리를 이용하면

$$\overline{A_nA_{n+1}}^2=\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}+\left(\frac{3}{4}\right)^{2n+2}-2\left(\frac{3}{4}\right)^{2n+1}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{13}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}$$

$$\therefore\ \overline{A_nA_{n+1}}=\frac{\sqrt{13}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{A_nA_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{13}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{\frac{3\sqrt{13}}{16}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{3\sqrt{13}}{4}$$

37) [정답] ③

[해설]

$\angle P_{n-1}AP_n = \theta_n$이라 하면 $l_n = \theta_n$이고

(나)에 의하여 $\theta_n = \theta_1 r^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n = \frac{\theta_1}{1-r} = \frac{8}{15}\pi \cdots ①$$

(다)에 의하여 $\theta_1(1+r) = \frac{\pi}{2} \cdots ②$

따라서 ①, ②에 의하여 $r = \frac{1}{4}$

38) [정답] ⑤

[해설]

$f'(x) = 8x$이므로

$f(x) = 4x^2$의 그래프 위의 점 $B_n(x_n, f(x_n))$에서 접선의 방정식은

$y = 8x_n(x - x_n) + 4x_n^2$

따라서 $0 = 8x_n(x_{n+1} - x_n) + 4x_n^2$에서

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$$

$$\therefore\ x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (\because\ x_1 = 1)$$

$$\therefore\ S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{x_n}{2}\right)4x_n^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{8}{7}$$

39) [정답] ①

[해설]

지급되는 장학금의 총액의 극한값은 첫째항이 $14 \times \frac{6}{5} \times \frac{2}{5}$, 공비가 $\frac{6}{5} \times \frac{3}{5}$ 인 무한등비급수이므로

$$\frac{14 \times \frac{6}{5} \times \frac{2}{5}}{1 - \frac{6}{5} \times \frac{3}{5}} = \frac{\frac{14 \times 12}{25}}{1 - \frac{18}{25}} = 24 \text{ (억 원)}$$

40) [정답] ③

[해설]

2015년 초 원리합계는 $10^8 \times (1+0.05)^{10}$ (원)

매년 A원 씩 연금을 받는다고 할 때, 2015년을 기준으로 했을 때의 가치는 각각 A, $\frac{A}{1+0.05}$, $\frac{A}{(1+0.05)^2}$, $\cdots$

이다. 따라서 $\frac{A}{1-\frac{1}{1.05}} = 10^8 \times 1.05^{10}$에서

$$A = 10^8 \times 1.05^{10} \times \frac{0.05}{1.05} = 10^8 \times 1.05^9 \times 0.05$$

$$= 7{,}750{,}000$$

41) [정답] ④

[해설]

$x = 0$일 때, $f(x) = 0$

$x \neq 0$일 때, $0 < \frac{9}{9+x^{2p}} < 1$이므로

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n x^{18}}{(9+x^{2p})^n}$$

$$= x^{18} \times \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{9+x^{2p}}\right)^n$$

$$= x^{18} \times \frac{\frac{9}{9+x^{2p}}}{1 - \frac{9}{9+x^{2p}}}$$

$$= x^{18} \times \frac{9}{x^{2p}} = 9x^{2(9-p)}$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$이려면 $9 - p > 0$ 즉, $p < 9$이어야 한다.

따라서 자연수 p는 1, 2, $\cdots$, 8의 총 8개다.