개념

〈 함수의 극한 〉

$\lim_{x\to a} f(x)$: x가 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$가 한없이 가까워지는 곳.
(a는 실수)

수렴 (실수값으로 존재) 할 수도 있고 발산 (극한 존재X) 할 수도 있음

$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \quad (\alpha\text{는 실수}) \iff \begin{cases} \lim_{x\to a+} f(x)=p & (p\text{는 실수}) \\ \lim_{x\to a-} f(x)=q & (q\text{는 실수}) \\ p=q \end{cases}$$

셋 중 하나라도 만족하지 않으면 발산 (= not 수렴)

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha,\ \lim_{x\to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수) 일 때,

$$\begin{cases} \lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha+\beta \\ \lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\alpha-\beta \\ \lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=\alpha\beta \\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{\alpha}{\beta} \quad (g(x)\neq 0,\ \beta\neq 0\text{일 때}) \\ \lim_{x\to a} cf(x)=c\cdot\lim_{x\to a} f(x) \quad (c\text{는 상수}) \end{cases}$$

$x\to a$ 대신 $x\to a+$, $x\to a-$, $x\to\infty$, $x\to -\infty$ 도 성립

〈 함수의 연속 〉

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속 $\iff$
$$\begin{cases} \lim_{x\to a+} f(x)=p & (p\text{는 실수}) \\ \lim_{x\to a-} f(x)=q & (q\text{는 실수}) \\ f(a)=r & (r\text{은 실수}) \\ p=q=r \end{cases}$$

넷 중 하나라도 만족하지 않는다면 불연속

함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속일 때,

$$\begin{cases} f(x)+g(x)\text{ 도 } x=a\text{에서 연속} \\ f(x)-g(x)\text{ 도 } x=a\text{에서 연속} \\ f(x)\cdot g(x)\text{ 도 } x=a\text{에서 연속} \\ \frac{f(x)}{g(x)}\text{ 도 } x=a\text{에서 연속} \quad (g(x)\neq 0\text{일 때}) \\ cf(x)\text{도 } x=a\text{에서 연속} \quad (c\text{는 상수}) \end{cases}$$

'함수의 연속' 의 정의에 따라 증명가능

〈 미분계수 〉

평균변화율의 극한 (a.k.a. 순간 변화율)

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$ (단, 극한이 존재할 때)

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능 $\iff \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\alpha$ (α는 실수)

$$\iff \begin{cases} \lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=p & (p\text{는 실수}) \\ \lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=q & (q\text{는 실수}) \\ p=q \end{cases}$$

셋 중 하나라도 만족하지 않는다면 미분 불가 $\iff$ 미분계수 존재X

함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때,

$$\begin{cases} f(x)+g(x)\text{ 도 } x=a\text{에서 미분가능} \\ f(x)-g(x)\text{ 도 } x=a\text{에서 미분가능} \\ f(x)\cdot g(x)\text{ 도 } x=a\text{에서 미분가능} \\ \frac{f(x)}{g(x)}\text{ 도 } x=a\text{에서 미분가능} \quad (g(x)\neq 0\text{일 때}) \\ cf(x)\text{도 } x=a\text{에서 미분가능} \quad (c\text{는 상수}) \end{cases}$$

'미분계수'의 정의에 따라 증명 가능

〈 도함수 〉

함수 $y=f(x)$에 대해,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{dy}{dx}$$

〈 접선 〉

$x=a$에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대해,

점 $(a, f(a))$에서의 함수 $f(x)$의 접선 l.

l의 방정식 : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$$=(x-a)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+f(a)$$

$\boxed{\text{발상}}$ 접선이 뜨면 접점 $(t, f(t))$ 설정하기

개념 설명

〈구간 별 함수의 미분가능성〉

$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x>a) \\ g(x) & (x\le a)\end{cases}$ 에서,

① $f(x)$가 $x=a$ 미분가능
② $g(x)$가 $x=a$ 미분가능
③ $h(x)$가 $x=a$ 미분가능

$\rightarrow \begin{cases} f(a)=g(a) \\ f'(a)=g'(a) \end{cases}$

pf) $h(x)$가 $x=a$ 미분가능 $\Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}$ 존재

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to a+}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=p \\ \lim_{x\to a-}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=q \\ p=q \end{cases}$

$\lim_{x\to a+}\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a+}\frac{f(x)-g(a)}{x-a}$ 가 존재해야.

$\lim_{x\to a+}\{f(x)-g(a)\} = \lim_{x\to a+}\left\{\frac{f(x)-g(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right\}$

$= \lim_{x\to a+}\frac{f(x)-g(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)$

$= \star\cdot 0$

$=0$

이때 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 와 $\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ 가 존재

$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\} = \lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right\}$

$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)$

$= \star\cdot 0$

$=0$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}+\lim_{x\to a}f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)+f(a)\}=\lim_{x\to a}f(x)$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

⊕ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분 가능하면 연속

$\Leftrightarrow$ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속

$\lim_{x\to a}\{g(x)-g(a)\} = \lim_{x\to a}\left\{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right\}$

$= \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)$

$= \star\cdot 0$

$=0$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to a}\{g(x)-g(a)\}+\lim_{x\to a}g(a)=\lim_{x\to a}g(x)$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to a}g(x)=g(a)$

$\Leftrightarrow$ 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 연속.

이제 $\lim_{x\to a+}\{f(x)-g(x)\}=0$ 에서

$f(a)-g(a)=0 \Leftrightarrow \boxed{f(a)=g(a)}$

$\lim_{x\to a+}\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a+}\frac{f(x)-g(a)}{x-a}$

$= \lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$= f'(a)$ (∵ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능)

$\lim_{x\to a-}\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

$= g'(a)$ (∵ 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능)

$\lim_{x\to a+}\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a-}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}$ 에서 $\boxed{f'(a)=g'(a)}$

〈곱함수의 미분가능성〉

$h(x)=f(x)g(x)$ 에서,

① $f(x)$가 $x=a$ 미분가능
② $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=p$, $\lim_{x\to a-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=q$, $p\neq q$
③ $h(x)$가 $x=a$ 미분가능

$\rightarrow f(a)=0$

pf) $h(x)$가 $x=a$ 미분가능 $\Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}$ 존재

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to a+}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=p \\ \lim_{x\to a-}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=q \\ p=q \end{cases}$

$\lim_{x\to a+}\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a+}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$

$= \lim_{x\to a+}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$

$= \lim_{x\to a+}\frac{g(x)\{f(x)-f(a)\}+f(a)\{g(x)-g(a)\}}{x-a}$

$= \lim_{x\to a+}\frac{g(x)\{f(x)-f(a)\}}{x-a} + \lim_{x\to a+}\frac{f(a)\{g(x)-g(a)\}}{x-a}$

$= \lim_{x\to a+}g(x)\cdot\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + f(a)\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

$= g(a)f'(a)+f(a)p$

$\lim_{x\to a-}\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a-}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$

$= \lim_{x\to a-}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$

$= \lim_{x\to a-}\frac{g(x)\{f(x)-f(a)\}+f(a)\{g(x)-g(a)\}}{x-a}$

$= \lim_{x\to a-}\frac{g(x)\{f(x)-f(a)\}}{x-a} + \lim_{x\to a-}\frac{f(a)\{g(x)-g(a)\}}{x-a}$

$= \lim_{x\to a-}g(x)\cdot\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + f(a)\lim_{x\to a-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

$= g(a)f'(a)+f(a)q$

$\lim_{x\to a+}\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a-}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}$

$\Leftrightarrow g(a)f'(a)+pf(a)=g(a)f'(a)+qf(a)$

$\Leftrightarrow (p-q)f(a)=0$

$\Leftrightarrow \boxed{f(a)=0}$ (∵ $p\neq q$)

〈절댓값 함수의 미분가능성〉

① $f(x)$ $x=a$ 미분가능
② $|f(x)|$ $x=a$ 미분가능

$\rightarrow f(a)=f'(a)=0$

pf)

$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & (f(x)\ge 0) \\ -f(x) & (f(x)<0)\end{cases} \xrightarrow{\text{가정}} |f(x)| = \begin{cases} f(x) & (x>a) \\ -f(x) & (x\le a)\end{cases}$

함수 $|f(x)|$ $x=a$ 미분가능 $\Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}$ 존재

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=p \\ \lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=q \\ p=q \end{cases}$

$\lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a} = \lim_{x\to a+}\frac{f(x)+f(a)}{x-a}$ 가 존재.

$\lim_{x\to a+}\{f(x)+f(a)\} = \lim_{x\to a+}\frac{f(x)+f(a)}{x-a}\cdot(x-a)$

$= \lim_{x\to a+}\frac{f(x)+f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a+}(x-a)$

$= \cancel{\alpha}\cdot 0$

$= 0$

이때 f(x)가 x=a에서 미분가능하므로 연속.

$2f(a)=0 \iff \boxed{f(a)=0}$

$\lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a} = \lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$= f'(a)$

$\lim_{x\to a-}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a} = \lim_{x\to a-}\frac{-f(x)+f(a)}{x-a}$

$= -\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$= -f'(a)$

$\lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a} = \lim_{x\to a-}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}$ 에서

$f'(a)=-f'(a) \iff \boxed{f'(a)=0}$

〈기함수, 우함수〉

실수 전체의 집합에서 함수 f(x)가,

$f(-x)=-f(x)$ 만족 → 기함수, 그래프가 원점 대칭

$f(-x)=f(x)$ 만족 → 우함수, 그래프가 y축 $(x=0)$ 대칭

〈$\frac{0}{0}$ 꼴에서의 미분계수의 정의〉

① f(x), g(x) x=a 미분가능

② $g'(a)\ne 0$, $g(x)\ne 0$

③ $f(a)=g(a)=0$

→ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{f'(x)|_{x=a}}{g'(x)|_{x=a}}$

pf) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \boxed{\frac{f'(a)}{g'(a)}}$

〈곱함수의 연속성〉

$h(x)=f(x)g(x)$ 에 대하여

① f(x) x=a 연속

② $\lim_{x\to a+}g(x)=p$, $\lim_{x\to a-}g(x)=q$, $g(a)=r$ 에 대해

$(p-q)^2+(q-r)^2\ne 0$

③ h(x) x=a 연속

→ $f(a)=0$

pf) $\lim_{x\to a+}h(x)=\lim_{x\to a+}f(x)g(x)=\lim_{x\to a+}f(x)\cdot\lim_{x\to a+}g(x) = k\cdot p$

$\lim_{x\to a-}h(x)=\lim_{x\to a-}f(x)g(x)=\lim_{x\to a-}f(x)\cdot\lim_{x\to a-}g(x) = k\cdot q$

$h(a)=f(a)g(a)=k\cdot r$

$kp=kq=kr \iff \begin{cases} k(p-q)=0 \\ k(q-r)=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{k=0}$ $(\because p\ne q \text{ or } q\ne r)$

〈미정계수의 결정〉 $x\to a+$, $x\to a-$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$일 때에도 성립

① $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\alpha$ (α는 실수)

② $\lim_{x\to a}f(x)=0$

→ $\lim_{x\to a}g(x)=0$

pf) $\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\left\{\frac{g(x)}{f(x)}\cdot f(x)\right\}$

$=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}\cdot\lim_{x\to a}f(x)$

$=\alpha\cdot 0$

$=\boxed{0}$

〈미정계수의 결정 2〉

① $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\alpha$ $(\alpha\ne 0)$

② $\lim_{x\to a}g(x)=0$

→ $\lim_{x\to a}f(x)=0$

pf) $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{g(x)}{f(x)}} = \frac{\lim_{x\to a}g(x)}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}}$

$=\frac{0}{\alpha}$

$=\boxed{0}$

〈편미분〉

이변수함수 $z=f(x,y)$ 에 대해, $\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$

함수 $z=f(x,y)$를 x에 대해 편미분하라

⟺ y는 x에 대해 상수 $(y=1,2,3\cdots)$ 취급하라

〈대칭성〉

· 함수 f(x)가 x=a에 대칭 → $f(a-x)=f(a+x)$

· 함수 f(x)가 점 (a,b)에 대칭 → $\frac{f(a-x)+f(a+x)}{2}=b$

<구간 별 함수의 연속성>

함수 $f(x) = \begin{cases} g(x) & (x < a) \\ h(x) & (x \geq a) \end{cases}$ 에 대하여

① $f(x)$ $x=a$ 연속
② $g(x)$ $x=a$ 연속
③ $h(x)$ $x=a$ 연속

$\rightarrow$ $g(a)=h(a)$

pf) $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} h(x) = h(a)$

$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a-} g(x) = g(a)$

$f(a) = h(a)$.

$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{g(a) = h(a)}$