Vector Space

著 : 雀
sukita1729@gmail.com

Ⅰ. Vector Space(벡터 공간)

고등학교 교육과정에서 배우는 벡터는 2차원 좌표계에 도시되는, 크기와 방향을 가지는 '화살표' 이다. 3차원 공간벡터는 최근 교육과정에서 제외되긴 했으나 여전히 '화살표' 라는 직관적 해석이 가능하다. 하지만 이는 '벡터' 의 하위 분류 중 하나로, 시각적 인식에 기반한 '물리 벡터' 이다. 4차원 이상으로만 넘어가도 기존의 '화살표' 의 인식이 적용되지 않으므로, 본문에서는 벡터의 수학적 성질들만을 남겨 가장 일반적인 벡터, 즉 '수학 벡터' 를 소개하고자 한다. 본문에서 설명하겠지만 실수, 복소수, n차원 순서쌍 그리고 심지어 함수와 행렬도 벡터가 될 수 있다.

[def] 공집합이 아닌 임의의 집합 V와 V에서 정의된 두 개의 연산(덧셈과 스칼라 곱셈)을 생각하자. 스칼라는 일반적으로 복소수이나, 본문에서는 실수 스칼라만 생각하기로 한다. V의 원소 u, v와 스칼라 $k\in\mathbb{R}$에 대하여 덧셈 $+ : V\times V \to V$와 스칼라 곱셈 $\cdot : V\times\mathbb{R} \to V$를 각각 $\mathrm{u}+\mathrm{v}$, $k\mathrm{u}$로 쓰기로 한다. 집합 V가 다음 10가지 공리(Axiom)들을 모두 만족시킬 때 V를 벡터 공간(vector space)이라 하고, V의 원소를 벡터(vector)라고 한다. (시각화에 의존하지 않는 일반적인 벡터를 다루므로 기존의 화살표 표기법은 사용할 수 없다. 본문에서는 벡터에 로마자와 볼드체 표기를 사용하여 스칼라와 구분하였다.)

(1) $\forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v}\in V,\ \mathrm{u}+\mathrm{v}\in V$

(2) $\forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v}\in V,\ \mathrm{u}+\mathrm{v}=\mathrm{v}+\mathrm{u}$

(3) $\forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}\in V,\ \mathrm{u}+(\mathrm{v}+\mathrm{w})=(\mathrm{u}+\mathrm{v})+\mathrm{w}$

(4) $\exists\, \mathbf{0}\in V$ s.t. $\mathrm{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathrm{u}=\mathrm{u}$ for $\forall\, \mathrm{u}\in V$

(5) $\forall\, \mathrm{u}\in V,\ \exists -\mathrm{u}\in V$ s.t. $\mathrm{u}+(-\mathrm{u})=(-\mathrm{u})+\mathrm{u}=\mathbf{0}$

(6) $\forall\, k\in\mathbb{R},\ \forall\, \mathrm{u}\in V,\ k\mathrm{u}\in V$

(7) $\forall\, k\in\mathbb{R},\ \forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v}\in V,\ k(\mathrm{u}+\mathrm{v})=k\mathrm{u}+k\mathrm{v}$

(8) $\forall\, k, m\in\mathbb{R},\ \forall\, \mathrm{u}\in V,\ (k+m)\mathrm{u}=k\mathrm{u}+m\mathrm{u}$

(9) $\forall\, k, m\in\mathbb{R},\ \forall\, \mathrm{u}\in V,\ k(m\mathrm{u})=(km)(\mathrm{u})$

(10) $\forall\, \mathrm{u}\in V,\ 1\mathrm{u}=\mathrm{u}$

각 공리에 대한 해설은 다음과 같다.

(1) $\forall \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$, $\mathrm{u}+\mathrm{v} \in V$: 집합 V는 덧셈 연산에 대하여 닫혀 있다.

(2) $\forall \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$, $\mathrm{u}+\mathrm{v}=\mathrm{v}+\mathrm{u}$: 덧셈의 교환법칙이 성립한다.

(3) $\forall \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w} \in V$, $\mathrm{u}+(\mathrm{v}+\mathrm{w})=(\mathrm{u}+\mathrm{v})+\mathrm{w}$: 덧셈의 결합법칙이 성립한다.

(4) $\exists \mathbf{0} \in V$ s.t. $\mathrm{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathrm{u}=\mathrm{u}$ for $\forall \mathrm{u} \in V$: 덧셈의 항등원 $\mathbf{0}$이 존재하여 덧셈의 교환법칙을 동시에 만족시킨다. 이러한 $\mathbf{0}$을 영벡터(zero vector)라 한다.

(5) $\forall \mathrm{u} \in V$, $\exists -\mathrm{u} \in V$ s.t. $\mathrm{u}+(-\mathrm{u})=(-\mathrm{u})+\mathrm{u}=\mathbf{0}$: 덧셈에 대한 역원이 존재하여 덧셈의 교환법칙을 동시에 만족시킨다. 이러한 벡터 $-\mathrm{u}$를 u의 음(negative)이라고 한다. 음 벡터는 u에 종속적이라는 직관적인 편의성에 따라 $-\mathrm{u}$로 표기하기도 하지만, u에 -1을 곱한 것이 아니다. 이 때문에 $-\mathrm{u}$ 대신 x 등 완전히 다른 기호를 사용하는 책도 있다. (그러나 최종적으로는 벡터 공간 공리들을 이용하여 $(-1)\mathrm{u}=-\mathrm{u}$임을 보일 수 있다.)

(6) $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall \mathrm{u} \in V$, $k\mathrm{u} \in V$: 집합 V는 스칼라 곱셈 연산에 대하여 닫혀 있다.

(7) $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$, $k(\mathrm{u}+\mathrm{v})=k\mathrm{u}+k\mathrm{v}$: 스칼라 곱셈의 좌분배법칙이 성립한다.

(8) $\forall k, m \in \mathbb{R}$, $\forall \mathrm{u} \in V$, $(k+m)\mathrm{u}=k\mathrm{u}+m\mathrm{u}$: 스칼라 곱셈의 우분배법칙이 성립한다.

(9) $\forall k, m \in \mathbb{R}$, $\forall \mathrm{u} \in V$, $k(m\mathrm{u})=(km)(\mathrm{u})$: 스칼라 곱셈의 교환법칙이 성립한다.

(10) $\forall \mathrm{u} \in V$, $1\mathrm{u}=\mathrm{u}$: 스칼라 1과 V의 임의의 벡터 u의 스칼라 곱셈의 결과는 u와 같다.

위 공리들은 언뜻 봐도 아주 자연스러운 공리들이다. 이는 위 공리들이 기존의 n차원 실수 순서쌍의 집합 $\mathbb{R}^n$에서 알려진 성질들을 기준으로 만들어진 것이기 때문이다. 또한 '덧셈' 연산은 실수체 $\mathbb{R}$의 덧셈 연산 '+'와 동일한 기호를 사용하더라도 의미가 동일하지는 않다. 예를 들어, $\mathbb{R}$의 두 벡터 $\mathrm{u}=u$, $\mathrm{v}=v$에 대하여

$$\mathrm{u}+\mathrm{v}=uv$$

와 같이 정의할 수도 있다. 즉, 벡터공간에서의 덧셈 연산은 일반적인 실수체의 덧셈 연산과는 별개의 개념인 것이다.

어떤 집합 V와 V에서의 연산 두 개가 주어졌을 때, V가 벡터 공간임을 보이는 일반적인 과정은 다음과 같다.

(1) V의 원소들과 두 연산의 정의를 확인한다.

(2) V가 덧셈과 스칼라 곱셈에 대하여 닫혀 있음을 확인한다. (즉, 1번과 6번 공리를 증명한다.)

(3) 나머지 공리들을 모두 증명한다.

Ⅱ. 여러 가지 벡터 공간

이 장에서는 셀 수 없이 많은 벡터 공간 중 잘 알려진 것들을 소개한다. 대부분 쉽고 직관적으로 증명할 수 있으므로, 일부 증명을 제외한 나머지는 부록을 참조하길 바란다.

(1) 영벡터 공간

벡터 공간 V가 오직 한 개의 원소만을 가진다고 하자. 이때 V는 벡터 공간이므로 4번 공리에 의해 V의 원소는 영벡터이다. 벡터 공간의 공리들을 고려하여 스칼라 $k\in\mathbb{R}$에 대하여 자연스럽게 다음과 같이 V에서의 연산들을 정의할 수 있다.

$$\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0},\ k\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

이러한 벡터 공간 V를 영벡터 공간(zero vector space)이라 한다.

(2) $\mathbb{R}^n$

$V=\mathbb{R}^n$으로 정의된 집합 V는 일반적인 덧셈과 스칼라 곱셈에 대한 벡터 공간이다. 일반적인 덧셈과 스칼라 곱셈은 V의 두 원소 $\mathbf{u}=(u_1, u_2, \cdots, u_n)$과 $\mathbf{v}=(v_1, v_2, \cdots, v_n)$, 스칼라 $k\in\mathbb{R}$에 대하여 다음과 같이 직관적으로 정의되는 연산이다.

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1+v_1, u_2+v_2, \cdots, u_n+v_n)$$
$$k\mathbf{u}=(ku_1, ku_2, \cdots, ku_n)$$

(3) $\mathbb{R}^\infty$

$\mathbf{u}=(u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots)$과 같이 무한히 많은 실수들의 순서쌍 $\mathbf{u}$로 이루어진 집합 V는 벡터 공간이고, 이를 $\mathbb{R}^\infty$와 같이 쓴다. 덧셈과 스칼라 곱셈은 V의 두 원소 $\mathbf{u}=(u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots)$과 $\mathbf{v}=(v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots)$, 스칼라 $k\in\mathbb{R}$에 대하여 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1+v_1, u_2+v_2, \cdots, u_n+v_n, \cdots)$$
$$k\mathbf{u}=(ku_1, ku_2, \cdots, ku_n, \cdots)$$

(4) M_{22}, M_{mn}

2×2 행렬 $\mathbf{u}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$로 이루어진 집합 V는 다음과 같이 정의된 덧셈과 스칼라 곱

셈에 대하여 벡터 공간이고, 이를 M_{22}와 같이 쓴다. 이를 확장하면 $m\times n$ 행렬로 이루어진 집합 M_{mn} 역시 벡터 공간이며, 행렬의 각 원소를 순서쌍으로 펼쳐 생각하면 M_{mn}과 $\mathbb{R}^{mn}$과 동형이므로 이는 당연한 결과이다.

$$\mathrm{u}+\mathrm{v}=\begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix},\ k\mathrm{u}=\begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix}$$

(5) $F(-\infty,\infty)$

정의역이 $(-\infty,\infty)$인 실함수들의 집합 V는 두 원소 $\mathrm{f}=f(x)$, $\mathrm{g}=g(x)$와 스칼라 $k\in\mathbb{R}$에 대하여 다음과 같이 정의된 두 연산에 대한 벡터 공간이다.

$$(\mathrm{f}+\mathrm{g})(x)=f(x)+g(x),\ (k\mathrm{f})(x)=kf(x)$$

이러한 벡터 공간 V를 $F(-\infty,\infty)$라 한다.

(6) 벡터 공간이 아닌 집합

집합 $V=\mathbb{R}^2$의 두 원소 $\mathrm{u}=(u_1,u_2)$와 $\mathrm{v}=(v_1,v_2)$, 스칼라 $k\in\mathbb{R}$에 대하여 두 연산

$$\mathrm{u}+\mathrm{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2),\ k\mathrm{u}=(ku_1,0)$$

이 주어진 집합 V는 벡터 공간이 아니다. 벡터 공간의 공리 중 마지막 10번 공리의 필요성에 의문을 제기할 수 있는데, 이는 10번 공리의 필요성을 보여주는 좋은 예시이다.

$$1\mathrm{u}=(1u_1,0)=(u_1,0)\neq(u_1,u_2)=\mathrm{u}$$

이므로 위와 같은 집합 V는 오직 10번 공리만을 만족시키지 않는다. (1번 ~ 9번 공리들에 대한 증명은 부록을 참조하라.)

(7) 일반적이지 않은 벡터 공간 [1]

집합 V를 양의 실수들의 집합($\mathbb{R}^+$)이라 하자. V의 두 원소 $\mathrm{u}=u$, $\mathrm{v}=v$와 스칼라 $k\in\mathbb{R}$에 대하여 덧셈과 스칼라 곱셈을 다음과 같이 정의하면, 집합 V는 벡터 공간이다.

$$\mathrm{u}+\mathrm{v}=uv,\ k\mathrm{u}=u^k$$

다음 장에서 증명할 정리 ①에 의하면 벡터 공간의 한 벡터 u와 그 공간의 영벡터 $\mathbf{0}$

에 대하여 $0\mathbf{u}=\mathbf{0}$이 성립한다. 이를 위 벡터 공간에 적용하면 양의 실수 u에 대하여

$$1=\mathbf{0}=0\mathbf{u}=u^0$$

을 얻는다. 지수 단원에서 임의의 양의 실수의 0승이 1이라는 사실은 '수학의 다른 여러 구조와 잘 맞아떨어지게 하기 위한 정의' 로 언급하고 넘어갔었는데, 그러한 정의가 타당한 이유를 확인해볼 수 있다.

벡터 공간은 이렇듯 구체적인 여러 대상을 추상화시키고 집약시킴으로써 전체를 볼 수 있게 해준다. 벡터 공간이라는 큰 형태에서 여러 성질과 정리들을 증명하고, 이를 특정한 공간으로 구체화시켜 쉽게 적용할 수 있는 것이다. 위와 같은 벡터 공간은 부록의 증명 과정에서도 알 수 있듯이 지수법칙을 기반으로 구성된 벡터 공간이며, 따라서 일반적인 벡터 공간에서 성립하는 정리 ② ~ ⑤ 역시 모두 성립할 것이라 예상할 수 있다. 이는 벡터 공간을 정의하고 연구하는 주된 이유와 목적 중 하나이다.

같은 방식으로 나머지 정리들을 모두 적용시켜 보면 다음의 결과를 얻을 수 있다.

② $k\mathbf{0}=\mathbf{0} \rightarrow 1^k=1\ (k\in\mathbb{R})$

③ $(-1)\mathbf{u}=-\mathbf{u} \rightarrow u^{-1}=\dfrac{1}{u}\ (u\in\mathbb{R}^+)$

④ If $k\mathbf{u}=\mathbf{0}$, then $k=0$ or $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ $\rightarrow$ If $u^k=1$, then $k=0$ or $u=1$ ($k\in\mathbb{R}$, $u\in\mathbb{R}^+$)

⑤ If $\mathbf{x}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$, then $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ $\rightarrow$ If $u^x=u$, then $x=1$ ($u, x\in\mathbb{R}^+$)

(8) 일반적이지 않은 벡터 공간 [2]

일대일대응 함수 $f:\mathbb{R}\rightarrow V$의 공역 V를 생각하자. V의 두 원소 $\mathbf{u}=u$, $\mathbf{v}=v$와 스칼라 $k\in\mathbb{R}$에 대하여 덧셈과 스칼라 곱셈을 다음과 같이 정의하면, 집합 V는 벡터 공간이다.

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=f(f^{-1}(u)+f^{-1}(v)),\ k\mathbf{u}=f(k\times f^{-1}(u))$$

위에서 살펴본 것과 같이 벡터 공간의 원소가 될 수 있는 것에는 실질적으로 제한이 없다. 따라서 어떠한 오브젝트(object)가 벡터임을 설명하기 위해서는 그 오브젝트가 속한 벡터 공간을 같이 제시해야 한다. 예를 들어, 원주율 π는 $\mathbb{R}$에 대한 벡터이다.

Ⅲ. 벡터 공간의 정리

벡터 공간에는 다음과 같은 기본적인 정리들이 있고, 이들은 기존의 공리 10개를 이용하여 증명할 수 있으므로 벡터 공간 공리에 포함되지 않는다.

① $0\mathrm{u} = \mathbf{0}$

② $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$

③ $(-1)\mathrm{u} = -\mathrm{u}$

④ If $k\mathrm{u} = \mathbf{0}$, then $k = 0$ or $\mathrm{u} = \mathbf{0}$

⑤ If $\mathrm{x} + \mathrm{u} = \mathrm{u}$, then $\mathrm{x} = \mathbf{0}$

⑥ 모든 벡터 공간은 유일한 영벡터 $\mathbf{0}$을 가진다.

⑦ $\mathrm{u} + \mathrm{w} = \mathrm{v} + \mathrm{w}$이면 $\mathrm{u} = \mathrm{v}$이다. (이를 벡터의 덧셈에 대한 cancellation law라고 한다.)

각 정리의 증명은 다음과 같다.

① $0\mathrm{u} + 0\mathrm{u}$를 생각하자. 8번 공리와 실수 0의 성질에 의해

$$0\mathrm{u} + 0\mathrm{u} = (0+0)\mathrm{u} = 0\mathrm{u}$$

이다. 이때 5번 공리에 의해 $0\mathrm{u}$의 음 $-0\mathrm{u}$가 존재하므로, 이를 양변에 더하면

$$[0\mathrm{u} + 0\mathrm{u}] + (-0\mathrm{u}) = 0\mathrm{u} + (-0\mathrm{u})$$

이다. 다시 공리 3번과 공리 5번을 적용하면

$$0\mathrm{u} + [0\mathrm{u} + (-0\mathrm{u})] = 0\mathrm{u} + (-0\mathrm{u}) = \mathbf{0}$$

$$0\mathrm{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

이다. 마지막으로 영벡터의 정의(4번 공리)에 의해

$$0\mathrm{u} = \mathbf{0}$$

이다. ■

② $k\mathbf{0} + k\mathrm{u}$를 생각하자. 7번 공리에 의해

$$k\mathbf{0} + k\mathrm{u} = k(\mathbf{0} + \mathrm{u})$$

이고 영벡터의 정의(4번 공리)에 의해

$$k\mathbf{0}+k\mathbf{u}=k\mathbf{u}$$

이다. 이때 5번 공리에 의해 벡터 $k\mathbf{u}$의 음 $-k\mathbf{u}$가 존재하므로, 이를 양변에 더해 주면

$$(k\mathbf{0}+k\mathbf{u})+(-k\mathbf{u})=k\mathbf{u}+(-k\mathbf{u})$$

이고, 3번 공리에 의해

$$k\mathbf{0}+[k\mathbf{u}+(-k\mathbf{u})]=k\mathbf{u}+(-k\mathbf{u})$$

이다. 5번 공리에 의해

$$k\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

이고 마지막으로 영벡터의 정의(4번 공리)에 의해

$$k\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

이다. ■

③ $(-1)\mathbf{u}=-\mathbf{u}$임을 보이려면 $(-1)\mathbf{u}$가 $\mathbf{u}$의 음이 됨을 설명해야 한다. 이때 10번 공리에 의해

$$\mathbf{u}+(-1)\mathbf{u}=1\mathbf{u}+(-1)\mathbf{u}$$

이고, 8번 공리와 실수의 성질에 의해

$$\mathbf{u}+(-1)\mathbf{u}=1\mathbf{u}+(-1)\mathbf{u}=(1+(-1))\mathbf{u}=0\mathbf{u}$$

이다. 마지막으로 앞서 보인 정리 ①에 의해

$$\mathbf{u}+(-1)\mathbf{u}=\mathbf{0}$$

이다. 따라서 $(-1)\mathbf{u}$는 벡터 $\mathbf{u}$의 음 $-\mathbf{u}$와 같다. ■

④ 스칼라 $k\in\mathbb{R}$에 대하여 $k\neq 0$이라고 가정하자. 이때

$$k\mathrm{u} = 0$$

의 양변에 $\frac{1}{k}$를 곱하면 9번 공리와 10번 공리에 의해 좌변은

$$\frac{1}{k}(k\mathrm{u}) = \left(\frac{1}{k} \times k\right)(\mathrm{u}) = 1\mathrm{u} = \mathrm{u}$$

이고 앞서 보인 정리 ②에 의해 우변은

$$\frac{1}{k}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

이다. 즉 $k \neq 0$이면 $\mathrm{u} = \mathbf{0}$이고, $k = 0$이면 정리가 성립하므로 증명이 완료되었다. ■

⑤ 5번 공리에 의해 벡터 u의 음 $-\mathrm{u}$가 존재하므로, 이를 양변에 더해주면

$$(\mathrm{x} + \mathrm{u}) + (-\mathrm{u}) = \mathrm{u} + (-\mathrm{u})$$

이고, 3번 공리에 의해

$$\mathrm{x} + [\mathrm{u} + (-\mathrm{u})] = \mathrm{u} + (-\mathrm{u})$$

이다. 5번 공리에 의해

$$\mathrm{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

이고 마지막으로 영벡터의 정의(4번 공리)에 의해

$$\mathrm{x} = \mathbf{0}$$

이다. ■

⑥ 어떤 벡터 공간에 두 개의 영벡터 $\mathbf{0}_1$, $\mathbf{0}_2$가 존재한다고 가정하자. 각각은 모두 영벡터이므로 영벡터의 정의(4번 공리)에 의해

$$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2$$

이고

$$\mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2$$

이다. 따라서 $0_1 = 0_2$이고 영벡터는 유일하다. ■

⑦ 5번 공리에 의해 벡터 w의 음 $-\mathrm{w}$가 존재하므로 이를 양변에 더해주면

$$(\mathrm{u}+\mathrm{w})+(-\mathrm{w})=(\mathrm{v}+\mathrm{w})+(-\mathrm{w})$$

이다. 이때 3번 공리에 의해

$$\mathrm{u}+[\mathrm{w}+(-\mathrm{w})]=\mathrm{v}+[\mathrm{w}+(-\mathrm{w})]$$

이고 5번 공리에 의해

$$\mathrm{u}+0=\mathrm{v}+0$$

이다. 마지막으로 영벡터의 정의(4번 공리)에 의해

$$\mathrm{u}=\mathrm{v}$$

이다. ■

Ⅳ. 부록

(각 번호는 벡터 공간 공리의 번호이다.)

(1) 영벡터 공간 $V=\{0\}$은 벡터 공간이다.

스칼라 $k\in\mathbb{R}$에 대하여 V에 주어진 두 연산은 다음과 같다.

$$0+0=0,\ k0=0$$

① V의 원소는 0으로 유일하고 덧셈의 정의에 의해 $0+0=0\in V$이다.

⑥ 스칼라 $k\in\mathbb{R}$에 대하여 스칼라 곱셈의 정의에 의해 $k0=0\in V$이다.

② V의 원소는 0으로 유일하므로 $0+0=0=0+0$이다.

③ 덧셈의 정의에 의해 $0+(0+0)=0+0=(0+0)+0$이다.

④ V에는 영벡터 0이 존재하여 $0+0=0$이다. (0은 V의 유일한 원소이다.)

⑤ V의 원소는 0 뿐이므로 0의 음(negative)은 0이고 $0+0=0$이 성립한다.

⑦ V의 원소는 0 뿐이므로 스칼라 $k\in\mathbb{R}$에 대하여 덧셈과 스칼라 곱셈의 정의에 의해

$k(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = \mathrm{k}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$이다. 다시 덧셈과 스칼라 곱셈의 정의에 의해 $\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{0} = k\mathbf{0}+k\mathbf{0}$이다.

⑧ V의 원소는 $\mathbf{0}$ 뿐이므로 덧셈과 스칼라 곱셈의 정의에 의해 $(k+m)\mathbf{0} = \mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{0} = k\mathbf{0}+m\mathbf{0}$이다.

⑨ V의 원소는 $\mathbf{0}$ 뿐이므로 $k(m\mathbf{0}) = k\mathbf{0} = \mathbf{0} = (km)(\mathbf{0})$이다.

⑩ 스칼라 곱셈의 정의에 의해 $1\mathbf{0} = \mathbf{0}$이다.

(2) $\mathbb{R}^n$은 벡터 공간이다.

$\mathbb{R}^n$의 임의의 원소 $\mathbf{u}$에 대하여 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$으로 쓰기로 하자. 스칼라 $k \in \mathbb{R}$에 대하여 $\mathbb{R}^n$에 주어진 두 연산은 다음과 같다. $(u_i \in \mathbb{R})$

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, \cdots, u_n+v_n)$$
$$k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, \cdots, ku_n)$$

① 실수의 성질에 의해 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$의 각 성분 u_i+v_i는 실수이므로, $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$이다.

⑥ 실수의 성질에 의해 $k\mathbf{u}$의 각 성분 ku_i는 실수이므로 $k\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$이다.

② 실수체에서 덧셈의 교환법칙이 성립하므로 $u_i+v_i = v_i+u_i$이다. 즉

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, \cdots, u_n+v_n)$$

$$= (v_1+u_1, v_2+u_2, \cdots, v_n+u_n) = \mathbf{v}+\mathbf{u}$$

이다. (두 벡터가 동일한 것은 각 성분이 모두 같은 것으로 정의한다.)

③ 실수체에서 덧셈의 결합법칙이 성립하므로 $u_i+(v_i+w_i) = (u_i+v_i)+w_i$이다. 즉,

$$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (u_1+(v_1+w_1), u_2+(v_2+w_2), \cdots, u_n+(v_n+w_n))$$

$$= ((u_1+v_1)+w_1, (u_2+v_2)+w_2, \cdots, (u_n+v_n)+w_n) = (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$$

이다.

④ 영벡터 $\mathbf{0}$을 $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$과 같이 정의하면 실수의 성질에 의해

$$\mathbf{u}+\mathbf{0} = (u_1+0, u_2+0, \cdots, u_n+0) = (0+u_1, 0+u_2, \cdots, 0+u_n) = \mathbf{0}+\mathbf{u}$$

$$= (u_1, u_2, \cdots, u_n) = \mathbf{u}$$

이다.

⑤ $\mathbf{u}$의 음 $-\mathbf{u}$를 $\mathbf{u}$의 각 성분에 -1을 곱한 벡터로 정의하면 실수의 성질에 의해 $u_i+(-u_i)=(-u_i)+u_i=0$이고 $-u_i \in \mathbb{R}$이다. 즉,

$$-\mathbf{u}=(-u_1,\ -u_2,\ \cdots,\ -u_n)$$

이라 하면

$$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(u_1+(-u_1),\, u_2+(-u_2),\ \cdots,\ u_n+(-u_n))$$

$$=((-u_1)+u_1,\ (-u_2)+u_2,\ \cdots,\ (-u_n)+u_n)=(-\mathbf{u})+\mathbf{u}$$

$$=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)=\mathbf{0}$$

이다.

⑦ 실수체에서 곱셈의 좌분배법칙이 성립하므로 $k(u_i+v_i)=ku_i+kv_i$이다. 즉,

$$k(\mathbf{u}+\mathbf{v})=(k(u_1+v_1),\, k(u_2+v_2),\ \cdots,\ k(u_n+v_n))$$

$$=(ku_1+kv_1,\ ku_2+kv_2,\ \cdots,\ ku_n+kv_n)=k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$$

이다.

⑧ 실수체에서 곱셈의 우분배법칙이 성립하므로 $(k+m)u_i=ku_i+mu_i$이다. 즉,

$$(k+m)\mathbf{u}=((k+m)u_1,\ (k+m)u_2,\ \cdots,\ (k+m)u_n)$$

$$=(ku_1+mu_1,\ ku_2+mu_2,\ \cdots,\ ku_n+mu_n)=k\mathbf{u}+m\mathbf{u}$$

이다.

⑨ 실수체에서 곱셈의 결합법칙이 성립하므로 $k(mu_i)=(km)(u_i)$이다. 즉,

$$k(m\mathbf{u})=(k(mu_1),\ k(mu_2),\ \cdots,\ k(mu_n))$$

$$=((km)u_1,\ (km)u_2,\ \cdots,\ (km)u_n)=(km)(\mathbf{u})$$

이다.

⑩ 실수의 성질에 의해 $1u_i=u_i$이므로 스칼라 곱셈의 정의에 의해

$$1\mathrm{u} = (1u_1,\ 1u_2,\ \cdots,\ 1u_n) = (u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n) = \mathrm{u}$$

이다.

(3) $\mathbb{R}^{\infty}$는 벡터 공간이다.

$\mathbb{R}^{\infty}$의 임의의 원소 u에 대하여 $\mathrm{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots)$으로 쓰기로 하자. 스칼라 $k \in \mathbb{R}$에 대하여 $\mathbb{R}^n$에 주어진 두 연산은 다음과 같다. ($u_i \in \mathbb{R}$)

$$\mathrm{u} + \mathrm{v} = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ \cdots,\ u_n + v_n,\ \cdots)$$
$$k\mathrm{u} = (ku_1,\ ku_2,\ \cdots,\ ku_n,\ \cdots)$$

① 실수의 성질에 의해 $\mathrm{u} + \mathrm{v}$의 각 성분 $u_i + v_i$는 실수이므로, $\mathrm{u} + \mathrm{v} \in \mathbb{R}^{\infty}$이다.

⑥ 실수의 성질에 의해 $k\mathrm{u}$의 각 성분 ku_i는 실수이므로 $k\mathrm{u} \in \mathbb{R}^{\infty}$이다.

② 실수체에서 덧셈의 교환법칙이 성립하므로 $u_i + v_i = v_i + u_i$이다. 즉

$$\mathrm{u} + \mathrm{v} = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ \cdots,\ u_n + v_n)$$

$$= (v_1 + u_1,\ v_2 + u_2,\ \cdots,\ v_n + u_n) = \mathrm{v} + \mathrm{u}$$

이다. (두 벡터가 동일한 것은 각 성분이 모두 같은 것으로 정의한다.)

③ 실수체에서 덧셈의 결합법칙이 성립하므로 $u_i + (v_i + w_i) = (u_i + v_i) + w_i$이다. 즉,

$$\mathrm{u} + (\mathrm{v} + \mathrm{w}) = (u_1 + (v_1 + w_1),\ u_2 + (v_2 + w_2),\ \cdots,\ u_n + (v_n + w_n),\ \cdots)$$

$$= ((u_1 + v_1) + w_1,\ (u_2 + v_2) + w_2,\ \cdots,\ (u_n + v_n) + w_n,\ \cdots) = (\mathrm{u} + \mathrm{v}) + \mathrm{w}$$

이다.

④ 영벡터 $\mathbf{0}$을 $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0, \cdots)$과 같이 정의하면 실수의 성질에 의해

$$\mathrm{u} + \mathbf{0} = (u_1 + 0,\ u_2 + 0,\ \cdots,\ u_n + 0,\ \cdots) = (0 + u_1,\ 0 + u_2,\ \cdots,\ 0 + u_n,\ \cdots) = \mathbf{0} + \mathrm{u}$$

$$= (u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots) = \mathrm{u}$$

이다.

⑤ u의 음 $-\mathrm{u}$를 u의 각 성분에 -1을 곱한 벡터로 정의하면 실수의 성질에 의해 $u_i + (-u_i) = (-u_i) + u_i = 0$이고 $-u_i \in \mathbb{R}$이다. 즉,

$$-\mathbf{u}=(-u_1,\ -u_2,\ \cdots,\ -u_n,\ \cdots)$$

이라 하면

$$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(u_1+(-u_1),\ u_2+(-u_2),\ \cdots,\ u_n+(-u_n),\ \cdots)$$

$$=((-u_1)+u_1,\ (-u_2)+u_2,\ \cdots,\ (-u_n)+u_n,\ \cdots)=(-\mathbf{u})+\mathbf{u}$$

$$=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots)=\mathbf{0}$$

이다.

⑦ 실수체에서 곱셈의 좌분배법칙이 성립하므로 $k(u_i+v_i)=ku_i+kv_i$이다. 즉,

$$k(\mathbf{u}+\mathbf{v})=(k(u_1+v_1),\ k(u_2+v_2),\ \cdots,\ k(u_n+v_n),\ \cdots)$$

$$=(ku_1+kv_1,\ ku_2+kv_2,\ \cdots,\ ku_n+kv_n,\ \cdots)=k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$$

이다.

⑧ 실수체에서 곱셈의 우분배법칙이 성립하므로 $(k+m)u_i=ku_i+mu_i$이다. 즉,

$$(k+m)\mathbf{u}=((k+m)u_1,\ (k+m)u_2,\ \cdots,\ (k+m)u_n,\ \cdots)$$

$$=(ku_1+mu_1,\ ku_2+mu_2,\ \cdots,\ ku_n+mu_n,\ \cdots)=k\mathbf{u}+m\mathbf{u}$$

이다.

⑨ 실수체에서 곱셈의 결합법칙이 성립하므로 $k(mu_i)=(km)(u_i)$이다. 즉,

$$k(m\mathbf{u})=(k(mu_1),\ k(mu_2),\ \cdots,\ k(mu_n),\ \cdots)$$

$$=((km)u_1,\ (km)u_2,\ \cdots,\ (km)u_n,\ \cdots)=(km)(\mathbf{u})$$

이다.

⑩ 실수의 성질에 의해 $1u_i=u_i$이므로 스칼라 곱셈의 정의에 의해

$$1\mathbf{u}=(1u_1,\ 1u_2,\ \cdots,\ 1u_n,\ \cdots)=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots)=\mathbf{u}$$

이다.

(4) M_{22}, M_{mn}은 벡터 공간이다.

M_{22}의 임의의 원소 u에 대하여 $\mathrm{u}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$로 쓰기로 하자. 스칼라 $k \in \mathbb{R}$에 대하여 M_{22}에 주어진 두 연산은 다음과 같다. ($u_{ij} \in \mathbb{R}$)

$$\mathrm{u}+\mathrm{v}=\begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix},\ k\mathrm{u}=\begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix}$$

① 실수의 성질에 의해 $\mathrm{u}+\mathrm{v}$의 각 성분 $u_{ij}+v_{ij}$는 실수이므로, $\mathrm{u}+\mathrm{v} \in M_{22}$이다.

⑥ 실수의 성질에 의해 $k\mathrm{u}$의 각 성분 ku_{ij}는 실수이므로 $k\mathrm{u} \in M_{22}$이다.

② 실수체에서 덧셈의 교환법칙이 성립하므로 $u_{ij}+v_{ij}=v_{ij}+u_{ij}$이다. 즉

$$\mathrm{u}+\mathrm{v}=\begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_{11}+u_{11} & v_{12}+u_{12} \\ v_{21}+u_{21} & v_{22}+u_{22} \end{bmatrix}=\mathrm{v}+\mathrm{u}$$

이다. (두 행렬이 동일한 것은 각 성분이 모두 같은 것으로 정의한다.)

③ 실수체에서 덧셈의 결합법칙이 성립하므로 $u_{ij}+(v_{ij}+w_{ij})=(u_{ij}+v_{ij})+w_{ij}$이다. 즉,

$$\mathrm{u}+(\mathrm{v}+\mathrm{w})=\begin{bmatrix} u_{11}+(v_{11}+w_{11}) & u_{12}+(v_{12}+w_{12}) \\ u_{21}+(v_{21}+w_{21}) & u_{22}+(v_{22}+w_{22}) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (u_{11}+v_{11})+w_{11} & (u_{12}+v_{12})+w_{12} \\ (u_{21}+v_{21})+w_{21} & (u_{22}+v_{22})+w_{22} \end{bmatrix}=(\mathrm{u}+\mathrm{v})+\mathrm{w}$$

이다.

④ 영벡터 $\mathrm{0}$을 $\mathrm{0}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$과 같이 정의하면 실수의 성질에 의해

$$\mathrm{u}+\mathrm{0}=\begin{bmatrix} u_{11}+0 & u_{12}+0 \\ u_{21}+0 & u_{22}+0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0+u_{11} & 0+u_{12} \\ 0+u_{21} & 0+u_{22} \end{bmatrix}=\mathrm{0}+\mathrm{u}$$

$$=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\mathrm{u}$$

이다.

⑤ u의 음 $-\mathrm{u}$를 u의 각 성분에 -1을 곱한 벡터로 정의하면 실수의 성질에 의해 $u_{ij}+(-u_{ij})=(-u_{ij})+u_{ij}=0$이고 $-u_{ij} \in \mathbb{R}$이다. 즉,

$$-\mathrm{u}=\begin{bmatrix}-u_{11} & -u_{12}\\ -u_{21} & -u_{22}\end{bmatrix}$$

라 하면

$$\mathrm{u}+(-\mathrm{u})=\begin{bmatrix}u_{11}+(-u_{11}) & u_{12}+(-u_{12})\\ u_{21}+(-u_{21}) & u_{22}+(-u_{22})\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(-u_{11})+u_{11} & (-u_{12})+u_{12}\\ (-u_{21})+u_{21} & (-u_{22})+u_{22}\end{bmatrix}=(-\mathrm{u})+\mathrm{u}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

이다.

⑦ 실수체에서 곱셈의 좌분배법칙이 성립하므로 $k(u_{ij}+v_{ij})=ku_{ij}+kv_{ij}$이다. 즉,

$$k(\mathrm{u}+\mathrm{v})=\begin{bmatrix}k(u_{11}+v_{11}) & k(u_{12}+v_{12})\\ k(u_{21}+v_{21}) & k(u_{22}+v_{22})\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}ku_{11}+kv_{11} & ku_{12}+kv_{12}\\ ku_{21}+kv_{21} & ku_{22}+kv_{22}\end{bmatrix}=k\mathrm{u}+k\mathrm{v}$$

이다.

⑧ 실수체에서 곱셈의 우분배법칙이 성립하므로 $(k+m)u_{ij}=ku_{ij}+mu_{ij}$이다. 즉,

$$(k+m)\mathrm{u}=\begin{bmatrix}(k+m)u_{11} & (k+m)u_{12}\\ (k+m)u_{21} & (k+m)u_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}ku_{11}+mu_{11} & ku_{12}+mu_{12}\\ ku_{21}+mu_{21} & ku_{22}+mu_{22}\end{bmatrix}=k\mathrm{u}+m\mathrm{u}$$

이다.

⑨ 실수체에서 곱셈의 결합법칙이 성립하므로 $k(mu_{ij})=(km)(u_{ij})$이다. 즉,

$$k(m\mathrm{u})=\begin{bmatrix}k(mu_{11}) & k(mu_{12})\\ k(mu_{21}) & k(mu_{22})\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (km)(u_{11}) & (km)(u_{12}) \\ (km)(u_{21}) & (km)(u_{22}) \end{bmatrix} = (km)(\mathrm{u})$$

이다.

⑩ 실수의 성질에 의해 $1u_{ij} = u_{ij}$이므로 스칼라 곱셈의 정의에 의해

$$1\,\mathrm{u} = \begin{bmatrix} 1u_{11} & 1u_{12} \\ 1u_{21} & 1u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathrm{u}$$

이다.

M_{mn}도 이와 동일한 방법으로 증명할 수 있다.

(5) $F(-\infty, \infty)$는 다음의 두 연산에 대한 벡터 공간이다.

$$(\mathrm{f} + \mathrm{g})(x) = f(x) + g(x), \; (k\mathrm{f})(x) = kf(x)$$

① $(\mathrm{f} + \mathrm{g})(x) = f(x) + g(x)$는 실수이므로 $\mathrm{f} + \mathrm{g}$는 $F(-\infty, \infty)$의 원소이다.

⑥ $(k\mathrm{f})(x) = kf(x)$는 실수이므로 $k\mathrm{f}$는 $F(-\infty, \infty)$의 원소이다.

② 실수체에서 덧셈의 교환법칙이 성립하므로

$$(\mathrm{f} + \mathrm{g})(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (\mathrm{g} + \mathrm{f})(x)$$

이고

$$\mathrm{f} + \mathrm{g} = \mathrm{g} + \mathrm{f}$$

이다.

③ 실수체에서 덧셈의 결합법칙이 성립하므로

④ 영벡터 $\mathbf{0}$을 모든 실수 x에 대하여 $i(x) = 0$인 상수함수 i로 정의하면, i는 $F(-\infty, \infty)$의 원소이고

$$(\mathrm{f} + \mathrm{i})(x) = f(x) + i(x) = i(x) + f(x) = (\mathrm{i} + \mathrm{f})(x) = f(x)$$

에서

$$\mathrm{f} + \mathrm{i} = \mathrm{i} + \mathrm{f} = \mathrm{f}$$

이다.

⑤ 벡터 f의 음 $-\mathrm{f}$를 $(-\mathrm{f})(x)=-f(x)$와 같이 정의하면

$$\mathrm{f}+(-\mathrm{f})=f(x)+(-f(x))=(-f(x))+f(x)=(-\mathrm{f})+\mathrm{f}$$

$$=0=\mathrm{i}$$

이다.

⑦ 실수체에서 곱셈의 좌분배법칙이 성립하므로

$$(k(\mathrm{f}+\mathrm{g}))(x)=k\times[f(x)+g(x)]=k\times f(x)+k\times g(x)=(k\mathrm{f}+k\mathrm{g})(x)$$

이고

$$k(\mathrm{f}+\mathrm{g})=k\mathrm{f}+k\mathrm{g}$$

이다.

⑧ 실수체에서 곱셈의 우분배법칙이 성립하므로

$$((k+m)\mathrm{f})(x)=(k+m)\times f(x)=k\times f(x)+m\times f(x)=(k\mathrm{f}+m\mathrm{f})(x)$$

이고

$$(k+m)\mathrm{f}=k\mathrm{f}+m\mathrm{f}$$

이다.

⑨ 실수체에서 곱셈의 결합법칙이 성립하므로

$$(k(m\mathrm{f}))(x)=k(m\times f(x))=(km)\times f(x)=((km)(\mathrm{f}))(x)$$

이고

$$k(m\mathrm{f})=(km)(\mathrm{f})$$

이다.

⑩ 실수의 성질에 의해

$$(1\mathrm{f})(x)=1\times f(x)=f(x)$$

이므로

$$1\mathrm{f} = \mathrm{f}$$

이다.

(6) 집합 $V = \mathbb{R}^2$의 두 원소 $\mathrm{u} = (u_1, u_2)$와 $\mathrm{v} = (v_1, v_2)$, 스칼라 $k \in \mathbb{R}$에 대하여 두 연산

$$\mathrm{u} + \mathrm{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2), \ k\mathrm{u} = (ku_1, 0)$$

이 주어진 집합 V는 1번 ~ 9번 공리들을 모두 만족시킨다.

① $\mathbb{R}^n$은 벡터 공간이므로 이와 동일한 덧셈 연산을 가지는 V에 대해서도 이 공리는 성립한다.

⑥ 실수의 성질에 의해 $k\mathrm{u}$의 성분 ku_1와 0은 실수이므로 $k\mathrm{u} \in V$이다.

② $\mathbb{R}^n$은 벡터 공간이므로 이와 동일한 덧셈 연산을 가지는 V에 대해서도 이 공리는 성립한다.

③ $\mathbb{R}^n$은 벡터 공간이므로 이와 동일한 덧셈 연산을 가지는 V에 대해서도 이 공리는 성립한다.

④ $\mathbb{R}^n$은 벡터 공간이므로 이와 동일한 덧셈 연산을 가지는 V에 대해서도 이 공리는 성립한다.

⑤ $\mathbb{R}^n$은 벡터 공간이므로 이와 동일한 덧셈 연산을 가지는 V에 대해서도 이 공리는 성립한다.

⑦ 실수체에서 곱셈의 좌분배법칙이 성립하므로 $k(u_i + v_i) = ku_i + kv_i$이다. 즉,

$$k(\mathrm{u} + \mathrm{v}) = (k(u_1 + v_1), 0)$$

$$= (ku_1 + kv_1, 0) = k\mathrm{u} + k\mathrm{v}$$

이다.

⑧ 실수체에서 곱셈의 우분배법칙이 성립하므로 $(k+m)u_i = ku_i + mu_i$이다. 즉,

$$(k+m)\mathrm{u} = ((k+m)u_1, 0)$$

$$= (ku_1 + mu_1, 0) = k\mathrm{u} + m\mathrm{u}$$

이다.

⑨ 실수체에서 곱셈의 결합법칙이 성립하므로 $k(mu_i) = (km)(u_i)$이다. 즉,

$$k(m\mathbf{u}) = (k(mu_1),\ 0)$$

$$= ((km)u_1,\ 0) = (km)(\mathbf{u})$$

이다.

(7) 집합 V를 양의 실수들의 집합($\mathbb{R}^+$)이라 하자. V의 두 원소 $\mathbf{u} = u$, $\mathbf{v} = v$와 스칼라 $k \in \mathbb{R}$에 대하여 덧셈과 스칼라 곱셈을 다음과 같이 정의하면, 집합 V는 벡터 공간이다.

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = uv,\ \ k\mathbf{u} = u^k$$

① 두 양의 실수 u, v에 대하여 uv는 양의 실수이므로 $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$이다.

⑥ 양의 실수 u와 스칼라 $k \in \mathbb{R}$에 대하여 u^k는 양의 실수이므로 $k\mathbf{u} \in V$이다.

② 실수체에서 곱셈의 교환법칙이 성립하므로 $uv = vu$이다. 즉,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = uv = vu = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

이다.

③ 실수체에서 곱셈의 결합법칙이 성립하므로 $u(vw) = (uv)w$이다. 즉,

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = u(vw) = (uv)w = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

이다.

④ 영벡터 $\mathbf{0}$을 $\mathbf{0} = 1$로 정의하면 $1 \in \mathbb{R}^+$이고 실수의 성질에 의해

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = u \times 1 = 1 \times u = \mathbf{0} + \mathbf{u} = u = \mathbf{u}$$

이다.

⑤ $\mathbf{u}$의 음 $-\mathbf{u}$를 u의 역수, 즉 $\dfrac{1}{u}$로 정의하면 $\dfrac{1}{u} \in \mathbb{R}^+$이고 실수의 성질에 의해

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = u \times \frac{1}{u} = \frac{1}{u} \times u = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u}$$

$$= 1 = \mathbf{0}$$

이다.

⑦ 지수법칙에 의해

$$k(\mathrm{u}+\mathrm{v})=(uv)^k=u^kv^k=k\mathrm{u}+k\mathrm{v}$$

이다.

⑧ 지수법칙에 의해

$$(k+m)\mathrm{u}=u^{k+m}=u^k\times u^m=k\mathrm{u}+m\mathrm{u}$$

이다.

⑨ 지수법칙에 의해

$$k(m\mathrm{u})=(u^m)^k=u^{km}=(km)(\mathrm{u})$$

이다.

⑩ 실수의 성질에 의해 $1u=u$이므로 스칼라 곱셈의 정의에 의해

$$1\mathrm{u}=u^1=u=\mathrm{u}$$

이다.

(8) 일대일대응 함수 $f:\mathbb{R}\rightarrow V$의 공역 V를 생각하자. V의 두 원소 $\mathrm{u}=u$, $\mathrm{v}=v$와 스칼라 $k\in\mathbb{R}$에 대하여 덧셈과 스칼라 곱셈을 다음과 같이 정의하면, 집합 V는 벡터 공간이다.

$$\mathrm{u}+\mathrm{v}=f(f^{-1}(u)+f^{-1}(v)),\ k\mathrm{u}=f(k\times f^{-1}(u))$$

① $\mathrm{u}+\mathrm{v}=f(f^{-1}(u)+f^{-1}(v))$이고 $f^{-1}(u)+f^{-1}(v)$는 실수이므로 $f(f^{-1}(u)+f^{-1}(v))=\mathrm{u}+\mathrm{v}$는 V의 원소이다.

⑥ $k\mathrm{u}=f(k\times f^{-1}(u))$이고 $k\times f^{-1}(u)$는 실수이므로 $f(k\times f^{-1}(u))=k\mathrm{u}$는 V의 원소이다.

② 실수체에서 덧셈의 교환법칙이 성립하므로

$$\mathrm{u}+\mathrm{v}=f(f^{-1}(u)+f^{-1}(v))=f(f^{-1}(v)+f^{-1}(u))=\mathrm{v}+\mathrm{u}$$

이다.

③ 실수체에서 덧셈의 결합법칙이 성립하므로

$$\mathrm{u}+(\mathrm{v}+\mathrm{w})=f(f^{-1}(u)+[f^{-1}(v)+f^{-1}(w)])$$

$$=f([f^{-1}(u)+f^{-1}(v)]+f^{-1}(w))=(\mathrm{u}+\mathrm{v})+\mathrm{w}$$

이다.

④ 영벡터 $\mathbf{0}$을 $\mathbf{0}=f(0)$으로 정의하면 $f^{-1}(\mathbf{0})=0$이므로

$$\mathrm{u}+\mathbf{0}=f(f^{-1}(u)+f^{-1}(0))=f(f^{-1}(u)+0)=f(0+f^{-1}(u))=\mathbf{0}+\mathrm{u}$$

$$=f(f^{-1}(u))=u=\mathrm{u}$$

이다.

⑤ 벡터 u의 음 $-\mathrm{u}$라 하면

$$\mathrm{u}+(-\mathrm{u})=f(f^{-1}(u)+f^{-1}(u'))=\mathbf{0}=f(0)$$

이다. 즉

$$f^{-1}(u)+f^{-1}(u')=0$$

이므로 $-\mathrm{u}=u'$은

$$u'=f(-f^{-1}(u))$$

이다. 마찬가지로

$$(-\mathrm{u})+\mathrm{u}=f(f^{-1}(u')+f^{-1}(u))=\mathbf{0}=f(0)$$

이다.

⑦ 실수체에서 곱셈의 좌분배법칙이 성립하므로

$$k(\mathrm{u}+\mathrm{v})=f(k\times[f^{-1}(u)+f^{-1}(v)])$$

$$=f(k\times f^{-1}(u)+k\times f^{-1}(v))=k\mathrm{u}+k\mathrm{v}$$

이다.

⑧ 실수체에서 곱셈의 우분배법칙이 성립하므로

$$(k+m)\mathrm{u}=f((k+m)\times f^{-1}(u))$$

$$= f(k \times f^{-1}(u) + m \times f^{-1}(u)) = k\mathrm{u} + m\mathrm{u}$$

이다.

⑨ 실수체에서 곱셈의 결합법칙이 성립하므로

$$k(m\mathrm{u}) = f(k[m \times f^{-1}(u)]) = f((km) \times f^{-1}(u)) = (km)(\mathrm{u})$$

이다.

⑩ 스칼라 곱셈의 정의에 의해

$$1\mathrm{u} = f(1 \times f^{-1}(u)) = f(f^{-1}(u)) = u = \mathrm{u}$$

이다.