8. 함수 $y=6\sin\frac{\pi}{12}x\ (0\le x\le 12)$의 그래프와 직선 $y=3$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

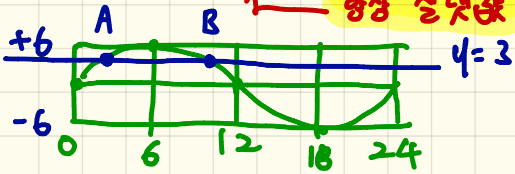
① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[수 I, 삼각] Graph, 주기성

<1> 그리자 (주기 조심)

$$p=\left|\frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}}\right|=24$$

항상 절댓값



<2> 계산

$$6\sin\frac{\pi}{12}x=3$$

$$\sin\frac{\pi}{12}x=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{12}x=\frac{\pi}{6}$$

$\therefore x=2,\ 10$ (선대칭)

* 변형

$y=6\sin\frac{\pi}{m}x\ (0\le x\le 12)$

$y=3 \longrightarrow$ 해: α

• 모든 해가 정수가 되도록 하는 자연수 m의 개수는?

$\hookrightarrow \sin\frac{\pi}{m}x=\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{m}x=\frac{\pi}{6}$

$6x=m$: 6의 배수

$0\le 6x\le 72$ $\quad 6\times1 \sim 6\times12$

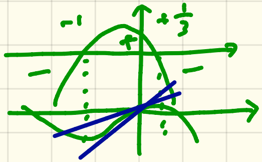
• 모든 해가 짝수가 되려면?

9. 원점을 지나고 곡선 $y=-x^3-x^2+x$ 에 접하는 모든 직선의 기울기의 합은? [4점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

[수Ⅱ. 미분] 삼차함수 & 접선

<1> 함수 관찰



$\Rightarrow$ (2개)

(0,0) 지남!

$y' = -3x^2-2x+1 = -(3x-1)(x+1)$

<2> 접선 관점

$y = (-3t^2-2t+1)(x-t) + f(t)$

(0,0) ↑

$0 = 3t^3+2t^2-t$

$\quad -t^3-t^2+t$

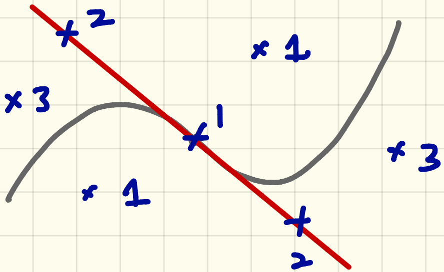
$= 2t^3+t^2 \rightarrow t^2(2t+1)=0$

$\therefore t=0,\ -\frac{1}{2}$

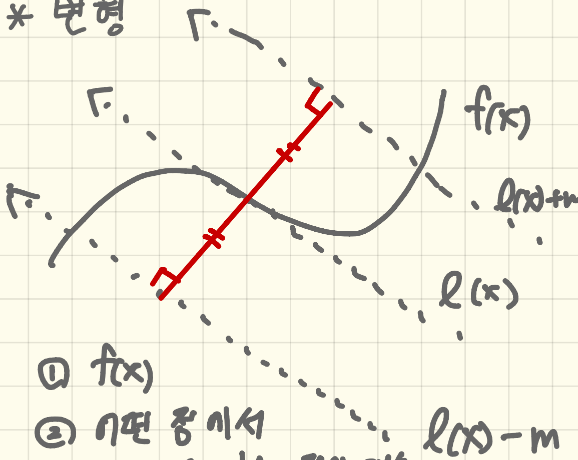
$f'(t) = +1, \quad -\frac{3}{4}+2 = \frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow$ $\alpha+\beta+\gamma = -\frac{1}{2}$, $\alpha\beta\gamma = 0$) 위험하다. (그림이 우선)

* 개념



* 변형



① f(x)

② 어떤 점에서 그을 수 있는 접선 개수

③ 점 ∈ 직선

10. $\frac{1}{2} < \log a < \frac{11}{2}$ 인 양수 a에 대하여 $\frac{1}{3} + \log\sqrt{a}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은? [4점]

① 10^{10} ② 10^{11} ③ 10^{12} ④ 10^{13} ⑤ 10^{14}

[수I. 로그]

<1> $\frac{1}{2} < \ell a < \frac{11}{2} \longrightarrow \frac{1}{3} + \ell\sqrt{a}$ 자연수

<2> $\frac{1}{3} + \ell\sqrt{a} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\ell a$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} < \quad < \frac{1}{3} + \frac{11}{4}$$

$$\frac{7}{12} < 1.2.3 < \frac{37}{12}$$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\ell a = 1$

" $= 2$

" $= 3$ ⊕

→ 하나 하나 구하지 X

$1 + \frac{1}{2}\ell ★ = 6$

$\ell ★ = 10$

* 개념

$\ell a + \ell b = \ell(a \times b)$

진수의 곱은 로그의 합

* 변형

$\sqrt{\frac{1}{3} + \log\sqrt{a}}$ 가 자연수

11. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

방정식 $f(x)=9$는 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 세 실근은 크기 순서대로 등비수열을 이룬다.

$f(0)=1$, $f'(2)=-2$일 때, $f(3)$의 값은? [4점]

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

[수Ⅰ/수Ⅱ, 수열/삼차함수]

<1> $f(x) = 1$ ~

<2> $f(x) = 9$: 세 근 $\left[\begin{array}{l} \alpha<\beta<r, \quad \beta^2=\alpha r \\ \frac{\alpha}{r}<\alpha<\alpha r \quad (r>1)^{*} \end{array}\right.$

주의. 등차와 달리. 등비는 경우가 많다.

<3> $f(0)=1$

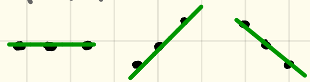
$f'(2)=-2$

<4> $f(x) - 9 = 1\left(x-\frac{\alpha}{r}\right)(x-\alpha)(x-\alpha r)$

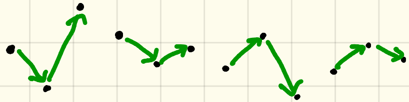
· $x=0 : 1-9 = -\alpha^3$: $\alpha=2$

* 개념

세 수가 등차



세 수가 등비



* 변형

'크기 순서대로' 조건이 없었다면?

12. $0 < a < b$인 모든 실수 a, b에 대하여

$$\int_a^b (x^3 - 3x + k)\,dx > 0$$

이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[수Ⅱ. 적분]

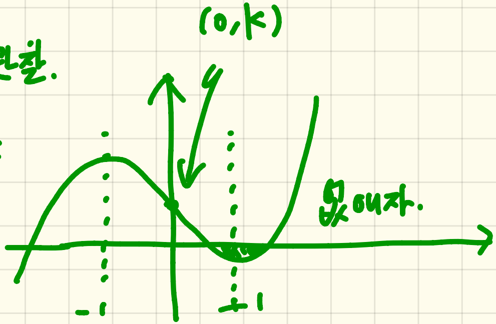
<1> $0 < a < b$. 모든 a, b

$\int_a^b x^3 - 3x + k > 0$ → 계산? No.

<2> 피적분 함수 관찰.

$y = x^3 - 3x + k$

$y' = 3x^2 - 3$



* 개념

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} y = f(x),\ x = a,\ x = b. \\ F(b) - F(a) \\ xf - \int xf' \end{cases}$$

* 변형

모든 실수 $t > 0$

$$\int_t^{t+2} (x^3 - 3x + k) > 0$$

21.

자연수 n 에 대하여
수열 a_n 은 다음을 만족한다.

$$a_n = n(A_n)$$

$$A_n = \{(a,b) \mid a^b < (a+b)^n,\ a, b\text{는 6의 양의 약수}\}$$

이 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{5} a_n$ 을 구하여라.

22.

삼차함수 $f(x) = x^3 + px^2 + qx$ 에 대하여

두 함수 $y = g(t)$, $y = h(t)$ 는 다음과 같다.

(가) $g(t) = \begin{cases} 1 : & \text{중심이 } (t, |t|) \text{이고 반지름이 } r \text{이며 } (r>0) \\ & y = f(x) \text{와 만나지 않는 원이 존재할 때} \\ 0 : & \text{나머지 경우} \end{cases}$

(나) $h(t) = \begin{cases} 1 : & \text{중심이 } (t, -|t|) \text{이고 반지름이 } r \text{이며 } (r>0) \\ & y = f(x) \text{와 만나지 않는 원이 존재할 때} \\ 0 : & \text{나머지 경우} \end{cases}$

$y = g(t) - h(t)$ 는 $t = \alpha, \beta$ 에서만 불연속일 때,

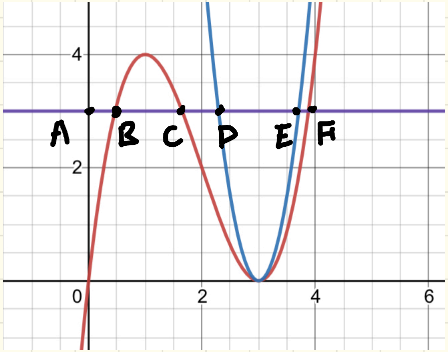
$|\alpha - \beta|$ 를 구하여라. (단, $\alpha \neq \beta$)

#22

두 함수

$f(x) = x(x-3)^2$

$g(x) = 6(x-3)^2$



에 대하여, $y=t$ 가 y축, $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 만나는 교점을 그림과 같이 A, B, C, D, E, F 라 하자.

이 때,

$$h(t) = \overline{BC} + \overline{DE} - 3\overline{AC} - \overline{CD} - \overline{EF} - t$$

는 $t = \frac{q}{p}$ 에서 최대이다. p^2+q^2 의 값은?

(단, $0<t<4$ 이고 p, q는 서로 소인 자연수)

#21

삼차함수

$$f(x) = x^3 - 3nx^2 + 3n^2x - n^3$$

에 대하여, $f(x) = x - n$ 의 서로다른 세 실근의 합을

a_n 이라고 하자.

이 때,

$$\sum_{k=1}^{2021} (-1)^k k \cdot a_k$$

의 값을 구하여라.

#22

삼차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 와

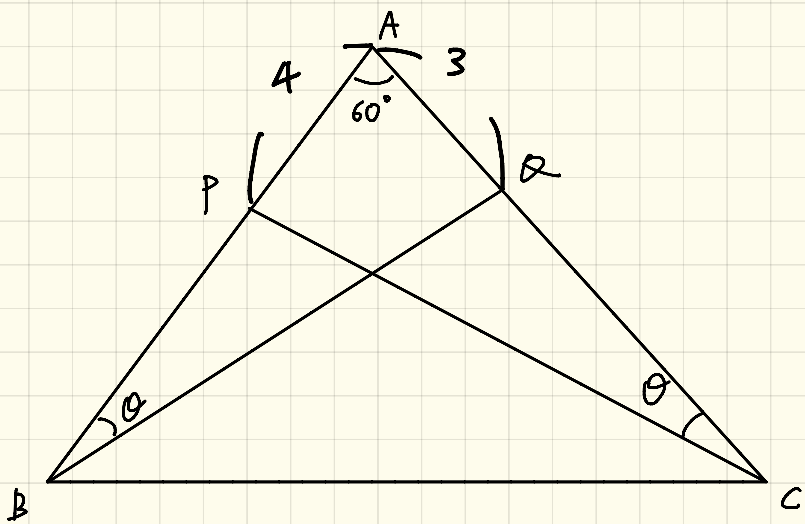
함수 $g(x) = \left| t|x| - |t| \right|$ 에 대하여 함수

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (-g(x) \le f(x) \le g(x)) \\ g(x) & (f(x) > g(x) \text{ or } f(x) < -g(x)) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 미분 가능하다.

$F(x) = \int_0^x \frac{f(s)}{s}\,ds$ 가 $x > 0$ 에서 역함수를 갖는

실수 t 의 최솟값을 구하여라.



θ 로 표현하여라.

(1) $\overline{PQ}$

(2) $\triangle ABQ$

① $\overline{AB}$

② $\overline{BQ}$

(3) $\triangle APC$

① $\overline{AC}$

② $\overline{PC}$

(4) $\triangle PBC$

① $\overline{PB}$

② $\overline{PC}$

③ $\overline{BC}$

(5) $\triangle QBC$

① $\overline{QC}$

② $\overline{QB}$

③ $\overline{BC}$

(6) $\triangle ABC$

① $\overline{AB}$

② $\overline{AC}$

③ $\overline{BC}$

#21.

양수 a에 대하여 $x \geq a$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x) = |a^{2x} - a^{x+1} + 4|$$

일 때, $y = f(x)$의 그래프가

직선 $y=2$와 만나는 서로 다른 점의 개수가

3이 되도록 하는 a의 범위를 모두 구하여라.

#22. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \cdot g\left(\frac{1}{x}\right) = -8$$

이고, $h(x) = \dfrac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$ 이라 할 때,

다음 조건이 성립한다.

(가) $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고,
$g(x)$는 $g(0)=0$인 이차함수이다.

(나) $h(x)$는 서로 다른 두 점에서만 미분 불가능하다.

(다) $h(x)$가 극댓값을 갖는 x값은 하나이다.

$f(2) \times g(3)$의 값을 구하여라.