2022 EBS 수능특강 수학1 1. 지수와 로그

p5 1번 단순 변형

1. $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}\times\sqrt[3]{(-3)^6}$의 값은?

① -9 ② -3 ③ 3 ④ 9 ⑤ 27

p5 2번 단순 변형

2. $\sqrt[12]{2}\times\frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[5]{2}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{2}}$를 만족시키는 3 이상의 두 자연수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

p7 3번 단순 변형

3. $\left(\sqrt{8}\times\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}\right)^{\frac{3}{2}}=2^k$을 만족시키는 상수 k의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

p7 4번 단순 변형

4. $\left(2\times2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}-1}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

p9 5번 단순 변형

5. $5^x=45$, $y=\log_5\frac{5}{3}$를 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 $x+2y$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

p9 6번 단순 변형

6. $\frac{\log_3\sqrt[4]{27}}{\log_5\sqrt{75}-\log_5\sqrt{3}}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

p11 4번 단순 변형

7. $\log_3 16 \times \log_4 12 - \dfrac{1}{\log_{256} 9}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

p11 8번 단순 변형

8. $\dfrac{1}{\log_{21} 3} - \dfrac{1}{\log_{49} 9}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

p13 9번 단순 변형

9. $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$일 때, $\log 0.0012$의 값은?

① -2.5208 ② -2.6208 ③ -2.7208
④ -2.8208 ⑤ -2.9208

p14 3번 단순 변형

10. 세 양수 a, b, c에 대하여 $a^{-\frac{1}{4}} = 4$, $b^{-\frac{1}{2}} = 3$, $c^{-\frac{1}{3}} = 12$일 때, $\dfrac{c}{ab}$의 값은?

① $\dfrac{4}{3}$ ② $\dfrac{11}{9}$ ③ $\dfrac{10}{9}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{8}{9}$

p14 4번 단순 변형

11. 두 실수 x, y에 대하여 $2^x = 3^y = 49$일 때, $7^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$의 값은?

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ ③ 1 ④ $\sqrt{6}$ ⑤ 6

p14 5번 단순 변형

12. 자연수 n에 대하여 $\left(\dfrac{216}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 개수를 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

p15 7번 단순 변형

13. $(\log_3 8-\log_9 8)(\log_4 27-\log_8 9)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

p15 8번 단순 변형

14. $\log_7 35-\dfrac{1}{\log_{25} 49}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

p15 9번 단순 변형

15. $a=\log 0.2$일 때, 다음 중 $\log 400$을 a로 나타낸 것은?

① $a+3$ ② $2a+3$ ③ $2a+4$
④ $3a+3$ ⑤ $3a+4$

p16 2번 단순 변형

16. $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$일 때, $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^2+a^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}}{a-a^{-\frac{1}{2}}}$의 값은?

① $-\sqrt{2}$ ② -1 ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 1

p16 3번 단순 변형

17. 실수 x에 대하여 $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}=3$일 때, $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$의 값 중 양수인 것은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

p16 4번 단순 변형

18. 두 실수 a, b에 대하여 $21^a=2$, $21^b=\sqrt{3}$일 때, $49^{\frac{2a}{1-2b}}$의 값은?

① 6 ② $4\sqrt{3}$ ③ 12 ④ 16 ⑤ $16\sqrt{3}$

p9 5번 응용 변형

19. $2^{2a+b}=27$, $4^{a-3b}=\dfrac{1}{25}$을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 a^{3a-2b}의 값은?

① 3 ② $\dfrac{24}{5}$ ③ $\dfrac{27}{5}$ ④ 6 ⑤ $\dfrac{36}{5}$

p14 4번 응용 변형

20. 세 실수 a, b, c에 대하여 $3^a=4^b=5^c$이고 $ac=2$일 때, 4^{ab+bc}의 값을 구하면?

① 30 ② 60 ③ 180 ④ 225 ⑤ 675

p16 1번 응용 변형

21. n이 자연수일 때, x에 대한 방정식 $x^n=n-12$의 실근의 개수를 $f(n)$이라 하자. $f(5)+f(10)+f(15)+f(20)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

p16 4번 응용 변형

22. 두 양수 a, b에 대하여 $2^a=3^b$, $(a-2)(b-2)=4$일 때, $4^a\times3^{-b}$의 값은?

① 12 ② 18 ③ 36 ④ 54 ⑤ 72

p16 5번 응용변형

23. $\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^n$이 네 자리 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구하면?

① 12 ② 10 ③ 8 ④ 6 ⑤ 4

p17 6번 응용 변형

24. 세 양수 a, b, c에 대하여

$$\sqrt[3]{a}=\sqrt{b}=\sqrt[4]{c},\ \log_8 a+\log_4 b+\log_2 c=2$$

일 때, $\log_2\dfrac{(ab)^2}{c}$의 값은?

① $\dfrac{1}{3}$ ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

p17 7번 응용 변형

25. 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 $x=\log_2 a$, $y=\log_2 b$라 하면 $x^2-4xy+y^2=0$이 성립한다. $\log_8 a^{\frac{1}{y}}+\log_8 b^{\frac{1}{x}}$의 값을 k라 할 때, $27k$의 값을 구하면?

① 41 ② 36 ③ 31 ④ 27 ⑤ 21

p17 8번 응용 변형

26. 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여

$$\log_2(a^2+ab+b^2)=1+\log_2(a^2-ab+b^2)$$

일 때, $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

p17 9번 응용 변형

27. 2보다 큰 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 m 중 최솟값을 $f(n)$이라 하자.

(가) $m \geq 2$
(나) 두 점 $(m,\ \log_n m)$, $(m+1,\ \log_n(m+1))$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$보다 작다.

이때, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구하면?

① 6 ② 9 ③ 10 ④ 13 ⑤ 16

p18 1번 응용 변형

28. $-2 \leq m \leq 2$, $1 \leq n \leq 16$인 두 정수 m, n에 대하여 $\sqrt[4]{n^m}$이 유리수가 되도록 하는 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는?

① 28 ② 32 ③ 36 ④ 40 ⑤ 44

p18 1번 응용 변형

29. 자연수 n에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다.

$$f(n)=\begin{cases} \sqrt[4]{9\times 2^{n+1}} & (n\text{이 홀수}) \\ \sqrt[4]{4\times 3^n} & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$$

10 이하의 두 자연수 p, q에 대하여 $f(p)\times f(q)$가 자연수가 되도록 하는 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는?

① 38 ② 41 ③ 44 ④ 47 ⑤ 50

p18 3번 응용 변형

30. 2 이상의 자연수 k에 대하여 집합 $A_k=\{x \mid \log_k x$가 유리수, $2 \leq x \leq 100$인 자연수$\}$라 할 때, <보기>에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $n(A_2)=6$

ㄴ. $n(A_3)+n(A_9)+n(A_{27})+n(A_{81})=16$

ㄷ. $A_m \cap A_n \neq \varnothing$이면 $A_m=A_n$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 및 해설

1	②	2	④	3	④	4	⑤	5	③
6	⑤	7	②	8	②	9	⑤	10	①
11	④	12	③	13	⑤	14	①	15	③
16	⑤	17	③	18	④	19	③	20	④
21	④	22	③	23	①	24	③	25	②
26	②	27	②	28	①	29	③	30	⑤

1. 답: ②
[출제범위] 거듭제곱근의 성질
<풀이>

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}\times\sqrt[3]{(-3)^6}=\sqrt[3]{-\frac{1}{3^3}}\times\sqrt[3]{3^6}$$
$$=\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{3}\right)^3}\times\sqrt[3]{(3^2)^3}$$
$$=-\frac{1}{3}\times3^2$$
$$=-3$$

필수 개념
▸ 거듭제곱근의 성질
근호 안의 수를 소인수 분해한 후, 거듭제곱근의 성질을 이용한다. m, n이 2이상의 정수이고 $a>0$, $b>0$일 때,
① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ ③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$
④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ ⑤ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (p는 자연수)

2. 답: ④
[출제범위] 거듭제곱근의 성질
<풀이>
12, 6, 5의 최소공배수는 60이므로 60제곱근으로 통일하여 나타낼 수 있다. 즉,

$$\sqrt[12]{2}\times\frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[5]{2}}=\sqrt[60]{2^5}\times\frac{\sqrt[60]{2^{10}}}{\sqrt[60]{2^{12}}}$$
$$=\sqrt[60]{\frac{2^5\times2^{10}}{2^{12}}}$$
$$=\sqrt[60]{2^3}$$
$$=\sqrt[20]{2}$$

$\sqrt[12]{2}\times\dfrac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[5]{2}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{2}}$ 이므로

$\sqrt[20]{2}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{2}}$ 에서 $\sqrt[20]{2}=\sqrt[mn]{2}$
즉, $mn=20$
따라서 이를 만족시키는 3 이상의 두 자연수 m, n은 $m=4$, $n=5$ 또는 $m=5$, $n=4$이므로 $m+n=9$

필수 개념
▸ 거듭제곱근의 성질
근호 안의 수를 소인수 분해한 후, 거듭제곱근의 성질을 이용한다. m, n이 2이상의 정수이고 $a>0$, $b>0$일 때,
① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ ③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$
④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ ⑤ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (p는 자연수)

3. 답: ④
[출제범위] 지수법칙
<풀이>

$$\left(\sqrt{8}\times\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\sqrt{2^3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$=(2^{\frac{3}{2}}\times2^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$
$$=(2^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$
$$=(2^{\frac{5}{6}})^{\frac{3}{2}}$$
$$=2^{\frac{5}{6}\times\frac{3}{2}}$$
$$=2^{\frac{5}{4}}$$

따라서 $k=\dfrac{5}{4}$

필수 개념
▸ 지수의 확장
(1) $a>0$이고 m, $n(m\geq2)$이 정수일 때,
$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$
(2) $a>0$, $b>0$이고, m, n이 실수일 때,
① $a^ma^n=a^{m+n}$ ② $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ③ $(a^m)^n=a^{mn}$
④ $(ab)^n=a^nb^n$ ⑤ $\left(\dfrac{b}{a}\right)^n=\dfrac{b^n}{a^n}$

4. 답: ⑤
[출제범위] 지수법칙
<풀이>

$$\left(2\times2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}-1}=\left(2^{1+\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}-1}$$

$=2^{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$=2^{3-1}$

$=4$

필수 개념

▸ 지수의 확장

(1) $a>0$이고 $m,\ n(m\geq 2)$이 정수일 때,

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(2) $a>0,\ b>0$이고, $m,\ n$이 실수일 때,

① $a^m a^n=a^{m+n}$ ② $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ③ $(a^m)^n=a^{mn}$

④ $(ab)^n=a^n b^n$ ⑤ $\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$

5. 답: ③

[출제범위] 로그의 기본성질

<풀이>

$5^x=45$에서 $x=\log_5 45$이므로

$x+2y=\log_5 45+2\log_5\frac{5}{3}$

$=\log_5 45+\log_5\left(\frac{5}{3}\right)^2$

$=\log_5\left(45\times\frac{25}{9}\right)$

$=\log_5 5^3$

$=3$

필수 개념

▸ 로그의 기본성질

$a>0,\ a\neq 1$이고 $x>0,\ y>0$일 때,

① $\log_a a=1,\ \log_a 1=0$ ② $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

③ $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ ④ $\log_a x^n=n\log_a x$ (n은 실수)

6. 답: ⑤

[출제범위] 로그의 기본성질

<풀이>

$\frac{\log_3\sqrt[4]{27}}{\log_5\sqrt{75}-\log_5\sqrt{3}}=\frac{\log_3\sqrt[4]{3^3}}{\log_5\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}}$

$=\frac{\log_3\sqrt[4]{3^3}}{\log_5\sqrt{5^2}}$

$=\frac{\log_3 3^{\frac{3}{4}}}{\log_5 5}$

$=\frac{\frac{3}{4}log_3 3}{\log_5 5}$

$=\frac{3}{4}$

필수 개념

▸ 로그의 기본성질

$a>0,\ a\neq 1$이고 $x>0,\ y>0$일 때,

① $\log_a a=1,\ \log_a 1=0$ ② $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

③ $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ ④ $\log_a x^n=n\log_a x$ (n은 실수)

7. 답: ②

[출제범위] 로그의 밑의 변환

<풀이>

$\log_3 16\times\log_4 12-\frac{1}{\log_{256}9}=\log_3 16\times\log_4 12-\log_9 256$

$=\log_3 4^2\times\frac{\log_3 12}{\log_3 4}-\log_{3^2}4^4$

$=2\log_3 4\times\frac{\log_3 12}{\log_3 4}-\frac{4}{2}log_3 4$

$=2\log_3 12-2\log_3 4$

$=2(\log_3 12-\log_3 4)$

$=2\log_3\frac{12}{4}$

$=2\log_3 3=2$

필수 개념

▸ 밑의 변환 공식

$a\neq 1,\ a>0,\ b>0$일 때,

① $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ $(c\neq 1,\ c>0)$ ② $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ $(b\neq 1)$

8. 답: ②

[출제범위] 로그의 밑의 변환

<풀이>

$\frac{1}{\log_{63}3}-\frac{1}{\log_{49}9}=\log_3 63-\log_9 49$

$=\log_3 63-\log_{3^2}7^2$

$=\log_3 63-\log_3 7$

$=\log_3 \frac{63}{7}$

$=\log_3 9=2$

필수 개념

▸ 밑의 변환 공식

$a\neq 1,\ a>0,\ b>0$일 때,

① $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}\ (c\neq 1,\ c>0)$ ② $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}\ (b\neq 1)$

9. 답: ⑤

[출제범위] 상용로그

<풀이>

$\log 0.0012=\log \frac{12}{10000}$

$=\log 12-\log 10^4$

$=\log(4\times 3)-\log 10^4$

$=2\log 2+\log 3-4\log 10$

$=2\times 0.3010+0.4772-4$

$=-2.9208$

필수 개념

▸ 상용로그의 값

임의의 양수 N은 $N=a\times 10^n\ (1\leq a<10,\ n$은 정수$)$의 꼴로 나타낼 수 있다. 즉,

$\log N=\log(a\times 10^n)=\log a+\log 10^n=n+\log a$

10. 답: ①

[출제범위] 지수법칙

<풀이>

$a^{-\frac{1}{4}}=4$에서 $a=4^{-4}=2^{-8}$

$b^{-\frac{1}{2}}=3$에서 $b=3^{-2}$

$c^{-\frac{1}{3}}=12$에서 $c=12^{-3}=(2^2\times 3)^{-3}=2^{-6}\times 3^{-3}$

따라서

$\frac{c}{ab}=\frac{2^{-6}\times 3^{-3}}{2^{-8}\times 3^{-2}}$

$=\frac{2^8\times 3^2}{2^6\times 3^3}$

$=\frac{4}{3}$

필수 개념

▸ 지수의 확장

(1) $a>0$이고 $m,\ n(m\geq 2)$이 정수일 때,

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(2) $a>0,\ b>0$이고, $m,\ n$이 실수일 때,

① $a^m a^n=a^{m+n}$ ② $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ③ $(a^m)^n=a^{mn}$

④ $(ab)^n=a^n b^n$ ⑤ $\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$

11. 답: ④

[출제범위] 지수법칙

<풀이>

$2^x=49$에서 $2=49^{\frac{1}{x}}=7^{\frac{2}{x}}$

$7^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

$3^y=49$에서 $3=49^{\frac{1}{y}}=7^{\frac{2}{y}}$

$7^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

따라서 $7^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=7^{\frac{1}{x}}\times 7^{\frac{1}{y}}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$

필수 개념

▸ 지수의 확장

(1) $a>0$이고 $m,\ n(m\geq 2)$이 정수일 때,

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(2) $a>0,\ b>0$이고, $m,\ n$이 실수일 때,

① $a^m a^n=a^{m+n}$ ② $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ③ $(a^m)^n=a^{mn}$

④ $(ab)^n=a^n b^n$ ⑤ $\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$

12. 답: ③

[출제범위] 거듭제곱근

<풀이>

$\left(\frac{216}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2^3\times 3^3}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\left(\frac{2^3\times 3^3}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$의 값이 자연수가 되려면 $\frac{2^3\times 3^3}{n}$이 자연수의 제곱인 수이어야 하므로 n은 3 또는 3^3을 약수로 갖고, 2 또는 2^3을 약수로 갖는 수이어야 한다.

따라서 $\left(\frac{216}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 n은

$3\times2=6,\ 3\times2^3=24,\ 3^3\times2=54,\ 3^3\times2^3=216$
이므로 구하는 모든 n의 개수는 4이다.

다른풀이

$\left(\frac{216}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2^3\times3^3}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=6\times\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$의 값이 자연수가 되려면

$\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$의 값이 $\frac{1}{2}$ 또는 $\frac{1}{3}$ 또는 $\frac{1}{6}$ 또는 자연수가 되어야 한다.

$\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$에서 $\frac{6}{n}=\frac{1}{4}$이므로 $n=24$

$\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$에서 $\frac{6}{n}=\frac{1}{9}$이므로 $n=54$

$\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$에서 $\frac{6}{n}=\frac{1}{36}$이므로 $n=216$

$\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$의 값이 자연수이려면 $\frac{6}{n}$이 자연수의 제곱인 수이어야 하므로 $n=6$
따라서 구하는 모든 n의 값의 개수는 4이다.

필수 개념

▸ 거듭제곱근이 자연수가 되는 미지수 구하기
$a^{\frac{m}{n}}$ (a는 소수)이 자연수이기 위한 조건
① $mn>0$ ② n은 m의 약수이다.

13. 답: ⑤
[출제범위] 로그의 기본성질
<풀이>
$(\log_3 8-\log_9 8)(\log_4 27-\log_8 9)$
$=(\log_3 2^3-\log_{3^2}2^3)(\log_{2^2}3^3-\log_{2^3}3^2)$
$=\left(3\log_3 2-\frac{3}{2}\log_3 2\right)\left(\frac{3}{2}\log_2 3-\frac{2}{3}\log_2 3\right)$
$=\frac{3}{2}\log_3 2\times\frac{5}{6}\log_2 3$
$=\frac{3}{2}\log_3 2\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{\log_3 2}$
$=\frac{5}{4}$

필수 개념

▸ 로그의 기본성질
$a>0,\ a\neq1$이고 $x>0,\ y>0$일 때,
① $\log_a a=1,\ \log_a 1=0$ ② $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$
③ $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ ④ $\log_a x^n=n\log_a x$ (n은 실수)

14. 답: ①
[출제범위] 로그의 밑의 변환
<풀이>
$\log_7 35-\frac{1}{\log_{25}49}=\log_7 35-\log_{49}25$
$=\log_7 35-\log_{7^2}5^2$
$=\log_7 35-\log_7 5$
$=\log_7\frac{35}{5}$
$=\log_7 7=1$

필수 개념

▸ 밑의 변환 공식
$a\neq1,\ a>0,\ b>0$일 때,
① $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ $(c\neq1,\ c>0)$ ② $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ $(b\neq1)$

15. 답: ③
[출제범위] 상용로그
<풀이>
$a=\log 0.2$
$=\log\frac{2}{10}$
$=\log 2-\log 10$
$=\log 2-1$
이므로 $\log 2=a+1$
따라서
$\log 400=\log(2^2\times10^2)$
$=\log 2^2+\log 10^2$
$=2\log 2+2$
$=2(a+1)+2$
$=2a+4$

필수 개념

▸ 상용로그의 값
임의의 양수 N은 $N=a\times10^n$ ($1\leq a<10$, n은 정수)의 꼴로 나타낼 수 있다. 즉,
$\log N=\log(a\times10^n)=\log a+\log 10^n=n+\log a$

16. 답: ⑤
[출제범위] 지수법칙

<풀이>

$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$에서 $a^{\frac{3}{2}}=\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}\right)^3=\sqrt{2}+1$

따라서

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^2+a^{\frac{1}{2}}}+\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a-a^{-\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^2+a^{\frac{1}{2}}}\times\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a-a^{-\frac{1}{2}}}\times\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}+1}+\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}-1}$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{2}+1)+1}+\frac{1}{(\sqrt{2}+1)-1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+(\sqrt{2}+2)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)}$$

$$=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{2}+1)}=1$$

필수 개념

▸ 지수의 확장

(1) $a>0$이고 $m,\ n(m\geq 2)$이 정수일 때,

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(2) $a>0,\ b>0$이고, $m,\ n$이 실수일 때,

① $a^m a^n=a^{m+n}$ ② $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ③ $(a^m)^n=a^{mn}$

④ $(ab)^n=a^n b^n$ ⑤ $\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$

17. 답: ③

[출제범위] 지수법칙

<풀이>

$x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}=3$에서

$x+x^{-1}=(x^{\frac{1}{3}})^3+(x^{-\frac{1}{3}})^3$

$=(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})^3-3x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})$

$=(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})^3-3(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})$

$=27-9=18$

$x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=k$라 하면

$x+x^{-1}=(x^{\frac{1}{2}})^2+(x^{-\frac{1}{2}})^2$

$=(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2+2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}$

$=(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2+2$

에서 $18=k^2+2$

$k^2=16$

$k=4$ 또는 $k=-4$

따라서 $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$의 값 중 양수인 것은 4이다.

필수 개념

▸ $a^x\pm a^{-x}=p$꼴의 조건이 주어진 경우의 식의 값 구하기

양수 a에 대하여 a^x+a^{-x}에서

① $(a^{\frac{1}{2}}\pm a^{-\frac{1}{2}})^2=a\pm 2+a^{-1}$ (복호동순)

② $(a^{\frac{1}{3}}\pm a^{-\frac{1}{3}})^3=a+3(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})+a^{-1}$

18. 답: ④

[출제범위] 지수법칙

<풀이>

$21^b=\sqrt{3}$에서 $21^{2b}=3,\ 21^{-2b}=3^{-1}=\frac{1}{3}$

$21^{1-2b}=21\times 21^{-2b}$

$=21\times\frac{1}{3}$

$=7$

$21=7^{\frac{1}{1-2b}}$ ⋯⋯ ㉠

$21^a=2$에서 $21^{2a}=4$이고 ㉠을 대입하면

$(7^{\frac{1}{1-2b}})^{2a}=4,\ 7^{\frac{2a}{1-2b}}=4$

따라서

$49^{\frac{2a}{1-2b}}=(7^2)^{\frac{2a}{1-2b}}$

$=(7^{\frac{2a}{1-2b}})^2$

$=4^2=16$

필수 개념

▸ 조건이 주어진 경우 식의 값 구하기

$a=2^k$을 $2=a^{\frac{1}{k}}$꼴로 변형한다.

주어진 식을 소인수분해하여 정리한다.

19. 답: ③

[출제범위] 지수법칙

<풀이>

$2^{2a+b}=27$이고, $4^{a-3b}=\frac{1}{25}$에서 $2^{2(a-3b)}=\left(\frac{1}{5}\right)^2$이므로

$2^{a-3b}=\frac{1}{5}$이다.

따라서 $2^{3a-2b}=2^{2a+b}\times 2^{a-3b}=\frac{27}{5}$

필수 개념

▸ 지수의 확장

(1) $a>0$이고 $m,\ n(m\geq 2)$이 정수일 때,

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(2) $a>0,\ b>0$이고, $m,\ n$이 실수일 때,

① $a^m a^n=a^{m+n}$ ② $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ③ $(a^m)^n=a^{mn}$

④ $(ab)^n=a^n b^n$ ⑤ $\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$

20. 답: ④

[출제범위] 지수법칙

<풀이>

$3^a=4^b=5^c$이므로 $4^{ab}=5^{ac}$이고 $3^{ac}=4^{bc}$이다.

$ac=2$이므로 $4^{ab}=5^2$이고 $4^{bc}=3^2$이다.

따라서 $4^{ab+bc}=4^{ab}\times 4^{bc}=5^2\times 3^2=225$

필수 개념

▸ $a^x=b^y$의 조건이 주어진 경우 식의 값 구하기

$a^x=b^y=c^z$과 같이 밑이 서로 다른 경우가 주어지면 새로운 변수를 사용하여 밑을 같게 한다.

⇒ $a^x=b^y=c^z=k$로 놓는다.

21. 답: ④

[출제범위] 거듭제곱근

<풀이>

$x^5=-7$의 실근은 $\sqrt[5]{-7}$이므로 $f(5)=1$

$x^{10}=-2$의 실근은 존재하지 않으므로 $f(10)=0$

$x^{15}=3$의 실근은 $\sqrt[15]{3}$이므로 $f(15)=1$

$x^{20}=8$의 실근은 $\pm\sqrt[20]{8}$이므로 $f(20)=2$

따라서 $f(5)+f(10)+f(15)+f(20)=4$

필수 개념

▸ 거듭제곱근의 성질

a의 n제곱근 : n제곱하여 a가 되는 수

n이 2이상의 정수일 때, 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a},\ -\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

22. 답: ③

[출제범위] 지수법칙

<풀이>

$2^a=3^b=k\ (k>1)$이라 놓으면 $2=k^{\frac{1}{a}}$, $3=k^{\frac{1}{b}}$

$(a-2)(b-2)=4$에서 $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{2}$

$k^{\frac{1}{a}}\times k^{\frac{1}{b}}=k^{\frac{a+b}{ab}}=k^{\frac{1}{2}}=6$

따라서 $4^a\times 3^{-b}=\frac{(2^a)^2}{3^b}=\frac{k^2}{k}=k=36$

필수 개념

▸ $a^x=b^y$의 조건이 주어진 경우 식의 값 구하기

$a^x=b^y=c^z$과 같이 밑이 서로 다른 경우가 주어지면 새로운 변수를 사용하여 밑을 같게 한다.

⇒ $a^x=b^y=c^z=k$로 놓는다.

23. 답: ①

[출제범위] 거듭제곱근

<풀이>

$(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^n=\left(\sqrt{2\times 4^{\frac{1}{3}}}\right)^n=2^{\frac{5}{6}n}$

이것이 네 자리의 자연수 이므로

$1000\leq 2^{\frac{5}{6}n}<10000$

이때, $2^{10}=1024$, $2^{13}=8192$이므로

$2^{10}\leq 2^{\frac{5}{6}n}<2^{14}$

$10\leq\frac{5}{6}n<14$

따라서 $\frac{5}{6}n$이 자연수가 되는 n의 값은 12이다.

필수 개념

▸ 거듭제곱근이 자연수가 되는 미지수 구하기

$a^{\frac{m}{n}}$ (a는 소수)이 자연수이기 위한 조건

① $mn>0$ ② n은 m의 약수이다.

24. 답: ③

[출제범위] 지수법칙

<풀이>

$\sqrt[3]{a}=\sqrt{b}=\sqrt[4]{c}=k$라 하면 $a=k^3$, $b=k^2$, $c=k^4$

$\log_8 a+\log_4 b+\log_2 c=\log_8 k^3+\log_4 k^2+\log_2 k^4$

$=\log_2 k+\log_2 k+4\log_2 k$

$=6\log_2 k$

즉, $6\log_2 k=2$에서 $\log_2 k=\dfrac{1}{3}$

따라서 $\log_2\dfrac{(ab)^2}{c}=\log_2\dfrac{(k^3\times k^2)^2}{k^4}=\log_2 k^6=6\log_2 k=2$

필수 개념

▸ $a^x=b^y$의 조건이 주어진 경우 식의 값 구하기

$a^x=b^y=c^z$과 같이 밑이 서로 다른 경우가 주어지면 새로운 변수를 사용하여 밑을 같게 한다.

⇒ $a^x=b^y=c^z=k$로 놓는다.

25. 답: ②

[출제범위] 로그의 기본성질

<풀이>

로그의 정의로부터 $a=2^x$, $b=2^y$이다.

$\log_8 a^{\frac{1}{y}}+\log_8 b^{\frac{1}{x}}=\log_8 2^{\frac{x}{y}}+\log_8 2^{\frac{y}{x}}$

$=\dfrac{1}{3}\log_2 2^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)$

$=\dfrac{x^2+y^2}{3xy}$

$=\dfrac{4xy}{3xy}=\dfrac{4}{3}$

이므로 $k=\dfrac{4}{3}$이다.

따라서 $27k=36$

필수 개념

▸ 로그의 기본성질

$a>0$, $a\neq 1$이고 $x>0$, $y>0$일 때,

① $\log_a a=1$, $\log_a 1=0$ ② $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

③ $\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ ④ $\log_a x^n=n\log_a x$ (n은 실수)

26. 답: ②

[출제범위] 로그의 기본성질

<풀이>

$\log_2(a^2+ab+b^2)=1+\log_2(a^2-ab+b^2)$

$\log_2(a^2+ab+b^2)=\log_2 2(a^2-ab+b^2)$

$a^2+ab+b^2=2(a^2-ab+b^2)$

$a^2-3ab+b^2=0$

$a^2+b^2=3ab$

따라서 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}=3$

필수 개념

▸ 로그의 기본성질

$a>0$, $a\neq 1$이고 $x>0$, $y>0$일 때,

① $\log_a a=1$, $\log_a 1=0$ ② $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

③ $\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ ④ $\log_a x^n=n\log_a x$ (n은 실수)

27. 답: ②

[출제범위] 로그의 성질의 활용

<풀이>

두 점 $(m,\ \log_n m)$, $(m+1,\ \log_n(m+1))$을 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{\log_n(m+1)-\log_n m}{(m+1)-m}=\log_n\dfrac{m+1}{m}$

조건 (나)에 의해

$\log_n\dfrac{m+1}{m}<\dfrac{1}{3}$에서 $\dfrac{m+1}{m}<n^{\frac{1}{3}}$

즉, $(m+1)^3<n\times m^3$

$n=3$일 때, $m=3$이면 $(3+1)^3<3\times 3^3$이므로 $f(3)=3$

$n=4$일 때, $m=2$이면 $(2+1)^3<4\times 2^3$이므로 $f(4)=2$

$n=5$일 때, $m=2$이면 $(2+1)^3<5\times 2^3$이므로 $f(5)=2$

$n=6$일 때, $m=2$이면 $(2+1)^3<6\times 2^3$이므로 $f(6)=2$

따라서 $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=9$

필수 개념

▸ 로그의 성질의 활용 - 식의 값 구하기

로그의 여러 가지 성질을 이용하여 주어진 조건을 적절하게 변형한 후 이를 구하는 식에 대입하여 식의 값을 구한다.

$a^x = b$꼴의 조건이 주어진 경우 로그의 정의에 의해 $x = \log_a b$임을 이용하여 주어진 식에 대입하여 구한다.

28. 답: ①

[출제범위] 거듭제곱근

<풀이>

(ⅰ) $m=0$일 때

n의 값에 관계없이 유리수가 되므로

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 16$

(ⅱ) $m=-1$ 또는 $m=1$일 때

n이 어떤 자연수의 네 제곱인 수가 되어야 하므로

$n=1,\ 16$

(ⅲ) $m=-2$ 또는 $m=2$일 때

n이 어떤 자연수의 제곱인 수가 되어야 하므로

$n=1,\ 4,\ 9,\ 16$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $16+4+8=28$

필수 개념

▸ 거듭제곱근이 자연수가 되는 미지수 구하기

$a^{\frac{m}{n}}$ (a는 소수)이 자연수이기 위한 조건

① $mn>0$ ② n은 m의 약수이다.

29. 답: ③

[출제범위] 거듭제곱근

<풀이>

(ⅰ) $p,\ q$가 모두 홀수일 때,

$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{9\times 2^{p+1}}\times\sqrt[4]{9\times 2^{q+1}}=3\times\sqrt[4]{2^{p+q+2}}$

에서 $p+q+2$가 4의 배수일 때, $f(p)\times f(q)$는 자연수이다.

두 자연수 $p,\ q$가 각각 10 이하이므로 조건에 맞는 순서쌍 $(p,\ q)$는

$p+q+2=4$일 때, $(1,\ 1)$

$p+q+2=8$일 때, $(1,\ 5),\ (3,\ 3),\ (5,\ 1)$

$p+q+2=12$일 때, $(1,\ 9),\ (3,\ 7),\ (5,\ 5),\ (7,\ 3),\ (9,\ 1)$

$p+q+2=16$일 때, $(5,\ 9),\ (7,\ 7),\ (9,\ 5)$

$p+q+2=20$일 때, $(9,\ 9)$

이므로 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 13이다.

(ⅱ) p는 홀수, q는 짝수일 때,

$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{9\times 2^{p+1}}\times\sqrt[4]{4\times 3^{q}}=\sqrt[4]{2^{p+3}\times 3^{q+2}}$

에서 $p+3,\ q+2$가 각각 4의 배수일 때, $f(p)\times f(q)$는 자연수이다.

두 자연수 $p,\ q$가 각각 10 이하이므로

$p+3$와 $q+2$의 값은 각각 4 또는 8 또는 12이고,

조건에 맞는 순서쌍 $(p,\ q)$는

$(1,\ 2),\ (1,\ 6),\ (1,\ 10),\ (5,\ 2),\ (5,\ 6),\ (5,\ 10),\ (9,\ 2),$ $(9,\ 6),\ (9,\ 10)$이므로 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 9이다.

(ⅲ) p는 짝수, q는 홀수일 때,

$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{4\times 3^{p}}\times\sqrt[4]{9\times 2^{q+1}}=\sqrt[4]{2^{q+3}\times 3^{p+2}}$

에서 $q+3,\ p+2$가 각각 4의 배수일 때, $f(p)\times f(q)$는 자연수이다.

두 자연수 $p,\ q$가 각각 10 이하이므로

$p+2$와 $q+3$의 값은 각각 4 또는 8 또는 12이고,

조건에 맞는 순서쌍 $(p,\ q)$는

$(2,\ 1),\ (2,\ 5),\ (2,\ 9),\ (6,\ 1),\ (6,\ 5),\ (6,\ 9),\ (10,\ 1),$ $(10,\ 5),\ (10,\ 9)$이므로 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 9이다.

(ⅳ) $p,\ q$가 모두 짝수일 때,

$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{4\times 3^{p}}\times\sqrt[4]{4\times 3^{q}}=2\times\sqrt[4]{3^{p+q}}$

에서 $p+q$가 4의 배수일 때, $f(p)\times f(q)$는 자연수이다.

두 자연수 $p,\ q$가 각각 10 이하이므로 조건에 맞는 순서쌍 $(p,\ q)$는

$p+q=4$일 때, $(2,\ 2)$

$p+q=8$일 때, $(2,\ 6),\ (4,\ 4),\ (6,\ 2)$

$p+q=12$일 때, $(2,\ 10),\ (4,\ 8),\ (6,\ 6),\ (8,\ 4),\ (10,\ 2)$

$p+q=16$일 때, $(6,\ 10),\ (8,\ 8),\ (10,\ 6)$

$p+q=20$일 때, $(10,\ 10)$

이므로 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 13이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 44이다.

필수 개념

▸ 거듭제곱근이 자연수가 되는 미지수 구하기

$a^{\frac{m}{n}}$ (a는 소수)이 자연수이기 위한 조건

① $mn>0$ ② n은 m의 약수이다.

30. 답: ⑤

[출제범위] 로그의 정의

<풀이>

ㄱ. $A_2=\{x\mid \log_2 x$가 유리수, $2\le x\le 100$인 자연수$\}$

$=\{2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6\}$

이므로 $n(A_2)=6$ (참)

ㄴ. $n(A_3)=n(A_9)=n(A_{27})=n(A_{81})=4$이므로

$n(A_3)+n(A_9)+n(A_{27})+n(A_{81})=16$ (참)

ㄷ. $x \in A_m \cap A_n$에 대하여 $x = m^p = n^q$ (p, q는 양의 유리수)

$y \in A_m$이면 $y = m^r = x^{\frac{r}{p}} = n^{\frac{qr}{p}}$ (r은 양의 유리수) 이므로

$y \in A_n$이다. 즉, $A_m \subset A_n$

같은 방법으로 $A_n \subset A_m$이므로 $A_m = A_n$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

필수 개념
▸ 로그의 정의
$a > 0$, $a \neq 1$일 때, 양수 N에 대하여
$a^x = N \Leftrightarrow x = \log_a N$

서지정보
저자 윤종구
발행처 나무아카데미
isbn 979-11-377-0485-5
제본형태 hwp pdf 파일
발행일 2021.04.02
가격 1,500원

값 1,500원
55410
9 791137 704855
ISBN 979-11-377-0485-5 (EPUB2)