수학 영역

∗ 이 N제는 미적분과 수2 만으로 이루어져 있으며,
총 문제의 개수는 54입니다.

∗ 출제자: Colorist(닉네임)

∗ 편집자: 2468(닉네임)

1. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)f'(x)}{\sin(f(x))} = 3$

(나) $\lim_{x \to 1} \frac{\sin(g(x))}{\sin(f(x))} = 1$

$0 < f(1) < 3\pi$, $0 < g(1) < 3\pi$일 때, $f(2)+g(2)$가 될 수 있는 모든 수의 합은 $a\pi + b$이다. ab의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.)

2. 실수 a에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x-a)(f \circ g)(x) \geq 0$$

을 만족시킨다. 실수 b에 대하여 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)(x-b)\{g(x-1)-g(k-1)\} \leq 0$$

을 만족시키도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $c \leq k$이고, $k = 3c$일 때 $a = \alpha$, $b = \beta$, $f(5) = p$이다. $\alpha + \beta + p + c$의 값을 구하시오.

3. 함수 $y=x^2e^x$의 그래프 위의 점 P와 양수 t에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}=t$를 만족시키는 점 P의 x좌표의 최댓값을 $f(t)$라 하자. 미분가능한 함수 $f(t)$에 대하여 $f'\left(\sqrt{e^2+1}\right)$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{\sqrt{e^2+1}}{e^2+1}$ ② $\frac{\sqrt{e^2+1}}{2e^2+1}$ ③ $\frac{\sqrt{e^2+1}}{3e^2+1}$
④ $\frac{\sqrt{e^2+1}}{4e^2+1}$ ⑤ $\frac{\sqrt{e^2+1}}{5e^2+1}$

4. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$\left|f\left(e^{x^3+|x|}\right)\right|$$

는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 함수

$$\left|f(-e^x)\right|$$

는 $x=0$에서만 미분가능하지 않다. 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3일 때, $f(2)$가 될 수 있는 모든 수의 합은?

① 4 ② $\frac{14}{3}$ ③ $\frac{16}{3}$ ④ 6 ⑤ $\frac{20}{3}$

5. 세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $x_1x_2>0$이고 $|x_2|>|x_1|$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_2)-f(x_1)<(x_2)^2-(x_1)^2$이다.

$f''(0)=2$일 때, $|a\times b\times c|$의 값을 구하시오.

6. 열린 구간 $(0,\ 10)$에서 정의된 함수 $f(x)=\sin\dfrac{n}{2}\pi x$에 대하여 함수

$$20e^{|f(x)|}-\sum_{k=1}^{9}\left|e^{kf(x)}-e^{kf(k)}\right|$$

는 9 이하의 모든 자연수 i에 대하여 $x=i$에서 미분가능하다. n이 될 수 있는 10 이하의 모든 자연수의 합을 구하시오.

7. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수의 역함수를 $g(x)$라 하자. 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 1} \frac{e^{f(x)} - g(\ln x)}{x-1} = 0$

(나) 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $\frac{f'(x_1)}{g'(x_2)}$는 $x_1 = a$, $x_2 = b$일 때 최솟값 1을 갖는다.

$100a + 10b + f(2)$의 값은?

① 96 ② 98 ③ 100 ④ 102 ⑤ 104

8. 두 함수

$$f(x) = |x(x-2)|$$

$$g(x) = \left| \frac{px}{x^2+1} + q \right|$$

에 대하여 방정식 $(f \circ g)(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이고, 방정식 $(f \circ g)(x) = 1$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 양수이다.)

9. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=xg(x)$이다.
> (나) 함수 $|f(x)-g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$f(1)=f(2)=0$, $g(0)\neq 2$일 때, 양수 x에 대하여 $\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=g(x)$의 모든 실근은 0, 4, α이다.
> (나) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{f(x)}=-\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{g(x)}{f(x)}=p$

$f(2)=0$일 때, $\alpha+p$의 값은? (단, $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq 4$)

① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

11. $f(0)=0$, $f(-1)>0$인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

(가) $x \le a$에서 $(f \circ f)(x) \le f(2)$를 만족시키도록 하는 실수 a의 최댓값은 2이다.
(나) $x \le b$에서 $(f \circ f)(x) \le (f \circ f)(-1)$를 만족시키도록 하는 실수 b의 최댓값은 2이다.

12. 최고차항의 계수가 p인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$|g(x)-x|=|f(x)|$$

를 만족시킨다. 함수 $g(x)$의 역함수 $h(x)$에 대하여 방정식 $g(x)=h(x)$의 모든 실근이 $-2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$이고, 함수 $h(x)$가 $x=k$에서만 미분가능하지 않을 때, $\left|\dfrac{1}{p\times h(k)}\right|$의 값을 구하시오. (단, $-2\sqrt{3}<k<2\sqrt{3}$)

13. $f(0) \neq 0$인 삼차함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x}{f(x)g(2-x)} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x)g(2-x)}{2-x} = 6$$

일 때, $|f(3)|$의 값을 구하시오.

14. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x) = nx$가 있다. 어떤 양수 t에 대하여

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - \cos\{8\pi(t+h)\}}{h} = n$$

일 때, n이 될 수 있는 모든 자연수의 합을 구하시오.

15. 열린구간 $(0,\ \pi)$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\cos x+2x\sin x$$

$$g(x)=\cos x-2x\sin x$$

가 있다. 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극값을 가지고, 함수 $g(x)$는 $x=\beta$에서 극값을 가질 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\tan\alpha=-2\alpha$

ㄴ. $\sec^2\alpha<\sec^2\beta$

ㄷ. $\dfrac{\tan\alpha}{\alpha-\pi}>2$

① ㄱ, ㄴ, ㄷ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ ⑤ ㄱ

16. 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=e^{-x^2+ax+b}$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $|x_2|>|x_1|$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
> $f(x_2)+\sqrt{2}\,|x_2|>f(x_1)+\sqrt{2}\,|x_1|$이다.

$\ln\left|f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|$의 최댓값을 M이라 할 때, $16M$의 값을 구하시오.

17. 함수 $f(x)=x^3+3x+3$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선을 l_1, 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 $(f(t),\ t)$에서의 접선을 l_2라 하고, 두 직선 l_1, l_2가 서로 만나는 점의 x좌표를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=\alpha$에서 극값을 갖도록 하는 모든 $h(\alpha)$의 값의 합은?

① -1 ② $-\frac{3}{2}$ ③ -2 ④ $-\frac{5}{2}$ ⑤ -3

18. 함수

$$f(x)=\ln\left|e^x-mx\right|$$

가 극값을 갖지 <u>않도록</u> 하는 양수 m의 값은?

① e ② $2e$ ③ $3e$ ④ $4e$ ⑤ $5e$

19. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{\pi}$인 이차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수

$$\left|\sin\left(\frac{1}{f(x)}\right)-\sin\left(\frac{1}{f(t)}\right)\right|$$

가 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않은 모든 α의 개수를 $g(t)$라 하고, 함수 $g(t)$가 $x=\beta$에서 불연속인 모든 β를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_m$(m은 6 이상인 자연수)라 하자. 함수 $g(t)$의 치역이 $\{0,\ 4,\ 8\}$이고, $\frac{t_1+t_m}{2}=g(t_6)$일 때, $3\pi f(5)+\sum_{k=1}^{m}\left|\sin\left(\frac{1}{f(t_k)}\right)\right|$의 값을 구하시오. (단, $f(x)>0$이다.)

20. 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $-1 \le x \le 1$인 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sin(f(x))=x$
(나) $f(x)<10\pi$

$\int_0^{4\pi} f(\sin x)dx$의 최댓값은?

① $9\pi^2$ ② $16\pi^2$ ③ $25\pi^2$ ④ $36\pi^2$ ⑤ $49\pi^2$

21. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(2x) = \{f(x)\}^2 \times \ln 2$$

를 만족시킨다. $\int_{2\pi}^{4\pi} f(x)\sin x dx = k$라 할 때, $\int_{\pi}^{2\pi} (f(x)\sin x)^2 dx = \frac{k}{\ln a}$이다. $\frac{1}{a}$의 값을 구하시오.

22. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_1^2 \frac{1}{f(x)} dx = \frac{1}{2}, \quad \int_1^2 \frac{xf'(x)}{\{f(x)\}^2} dx = 1$$

이고 $f(1) = 1$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

23. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\frac{f(x)}{x^2+1}$$

는 다음 조건을 만족시킨다.

> $x_1<0<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
> $g(x_1)<g(x_2)\le 2$이다.

$f(3)$의 최댓값을 구하시오.

24. 최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{f(x-3)}\times\frac{f(x)}{x-2}\right)$$

의 값이 존재한다. $f(-1)$이 최소일 때, $|f(3)|$의 값을 구하시오.

25. 함수 $f(x)=(x-a)^3+b$에 대하여 $x \neq k$인 모든 실수 x에 대하여 정의된 함수

$$g(x)=e^{\frac{1}{f(x)}}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $\lvert g(x)-t \rvert$가 $x \neq k$인 모든 실수 x에 대하여 미분가능하기 위한 양수 t의 값은 $f(1)$뿐이다.

$f(k)=0$일 때, 세 상수 a, b, k에 대하여 $a+b+k$의 값을 구하시오.

26. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x+1)f(-x+1)=(2x+2)e^{2x^2+4}$$

를 만족시킨다. $f(0)=e$, $f(1)=e^2$일 때, $f(2)$의 값은?

① e ② e^2 ③ e^3 ④ e^4 ⑤ e^5

27. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f'(0)<0$인 이차함수 $f(x)$와 상수 k에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{f(x)} & (f(x)\neq 0)\\ k & (f(x)=0)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f(1)$의 최댓값은 M이고, $f(1)=M$일 때 $k=\alpha$이다. $\alpha\times M$의 값은?

① $1-\dfrac{1}{\pi}$ ② $1+\dfrac{1}{\pi}$ ③ $1-\dfrac{2}{\pi}$
④ $1+\dfrac{2}{\pi}$ ⑤ $3-\dfrac{1}{\pi}$

28. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (f(x)-f(0)>x)\\ 3 & (f(x)-f(0)\leq x)\end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=a$에서만 불연속이다.
(나) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-(f(4)-4)}{x}=N$ (N은 자연수)

$\lim\limits_{x\to a}g(x)-g(a)=b$라 할 때, $b>0$이다. $\dfrac{f(1)+a+b}{N}$의 값은?

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

29. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 오직 한 점에서 만난다. $f(0)=f''(0)=0$일 때, $f(2)$의 최솟값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

30. $0<t<4\pi$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=|x^2-(2|\sin t|+5)x+6|$$

이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 각각 $(\alpha_1,\ 0)$, $(\alpha_2,\ 0)(\alpha_1<\alpha_2)$라 하자. 함수

$$g(t)=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)dx$$

가 $t=\beta$에서 극값을 갖는 모든 β를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 β_1, β_2, $\cdots$, β_m (m은 자연수)라 할 때, $\sum_{k=1}^{m} g(\beta_k)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

31. 최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=-2$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수

$$|f(x)-f'(t)(x-2)|$$

가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수를 $g(t)$라 하자. $g(0)=0$일 때, $\lim_{t\to k-} g(t) > g(k)$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은?

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

32. 함수 $f(x)=\frac{\pi}{2}(x^3-3x)$에 대하여 함수

$$\frac{1}{\sin(f(x))}$$

가 열린구간 $(a,\ b)$에서 연속일 때, 두 실수 $a,\ b\,(a<b)$에 대하여 $b-a$의 최댓값은?

① $\sqrt{2}-1$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ 1
④ $\sqrt{5}-1$ ⑤ $\sqrt{6}-1$

33. 열린구간 $(0,\ 1)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=-\{x\ln x+(1-x)\ln(1-x)\}$$

이다. $0<t<1$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 열린구간 $(0,\ 1)$에서 $f(x)=f(1-x)$이다.

ㄴ. $f\left(\frac{1}{2}\right)\le g\left(\frac{1}{2}\right)$

ㄷ. $\int_0^1 g(x)dx \ge \ln 2$

① ㄱ, ㄴ, ㄷ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ ⑤ ㄱ

34. 함수 $f(x)=\frac{1}{5}\sin^5 x+x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

$\int_0^{2\pi}|f(2\pi-x)-g(x)|dx$의 값은?

① π^2 ② $2\pi^2$ ③ $3\pi^2$ ④ $4\pi^2$ ⑤ $5\pi^2$

35. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 $0<p<10\pi$인 실수 p에 대하여

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(f(x))}{x^2}=\lim_{x\to1}\frac{p-f(x)}{x-1}=3\pi$$

일 때, p가 될 수 있는 모든 실수의 합은 k이다. $k+f'(3)$의 값은?

① 26π ② 28π ③ 30π ④ 32π ⑤ 34π

36. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)g(x)=x-1$$

을 만족시키고, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)=\sin(h(x))$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)$의 치역이 $\left\{x \middle| -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right\}$이고, 함수 $h(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가질 때, $4\times\{a+f(2)\}$의 값을 구하시오.

37. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 $0<a<5$인 정수 a가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\lvert f(x)\rvert=\lvert \sin x\rvert$이다.
(나) $\displaystyle\int_0^{5\pi}\lvert f(x)\rvert dx=\left\lvert\int_0^{5\pi}f(x)dx\right\rvert+4$
(다) $\displaystyle\int_0^{5\pi}\lvert f(x)\rvert dx=\int_0^{a\pi}f(x)dx+\int_{a\pi}^{5\pi}\{-f(x)\}dx$

$\displaystyle\int_0^{5\pi}f(x)dx+a$가 될 수 있는 모든 수의 합을 구하시오.

38. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 x좌표가 최대인 점의 y좌표를 $g(t)$라 하자. 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ (m은 2 이상인 자연수)라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n=1,\ 2,\ \cdots,\ m$일 때, $g(\alpha_n)=0$이다.
(나) $\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{g(h)+g(-h)-2g(0)}{h}=-9$

$\displaystyle 2\int_0^{\alpha_1}g(x)dx+\int_0^{\alpha_2+1}g(x)dx$의 값은?

① $\dfrac{27}{4}$ ② $\dfrac{29}{4}$ ③ $\dfrac{31}{4}$ ④ $\dfrac{33}{4}$ ⑤ $\dfrac{35}{4}$

39. 상수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} e^x & (x\neq a) \\ e^a+1 & (x=a) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x+k$와 만나지 않도록 하는 실수 k의 최댓값이 M일 때, $M+f(a)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

40. 기울기가 1인 일차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가

$$g'(x)=f(x)\int_0^{2\pi}\sin|t-x|\,dt$$

이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 극값 k를 가진다. (나) $g(-\pi)=g(3\pi)$

$g(2\pi)-k$의 값은?

① π^2-4 ② π^2-2 ③ 0 ④ $-\pi^2+4$ ⑤ $-\pi^2+2$

41. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=ax^2e^{2-x}\,(a>0)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\cos(\pi f(x))=\cos(\pi g(x))$이다. (나) 모든 실수 t에 대하여 $f(t)>-3$이고, 방정식 $f(x)=f(t)$는 오직 하나의 실근을 가진다.

$f(0)=0$일 때, 상수 a의 값은?

① 4　② 2　③ 1　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{1}{4}$

42. 두 상수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x\le k$(k는 자연수)인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=x^2+ax+b\int_0^2|f(x)|dx$$

를 만족시킨다. $\int_0^1 f(x)dx=\frac{f(0)}{b}$일 때,

$\left|a\times b\times k\int_0^2\{1-f(x)\}dx\right|$의 값을 구하시오.

43. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 두 함수

$$h_1(x) = |f(x)-x| - |g(x)-x|$$

$$h_2(x) = |f(g(x)-x)|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

44. 실수 전체의 집합에서 이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=2$, $(f \circ f \circ f)(1)=8$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이고
$f'(x)f''(x)>0$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $1 < f(2) < 2$
ㄴ. $2f(2) < f(1)+f(3)$
ㄷ. $2 < \int_1^2 f(x)dx < 3$

① ㄱ, ㄴ, ㄷ　② ㄱ, ㄷ　③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ　⑤ ㄷ

45. 모든 양수 x에 대하여 $f''(x)>0$인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)f'\left(\frac{1}{x}\right)=16$이다.

(나) $f'(2)+f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{65}{2}$

$f(1)=1$, $f(2)=16$일 때, 함수 $y=f(x)$위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선과 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선이 만나는 점의 x좌표는?

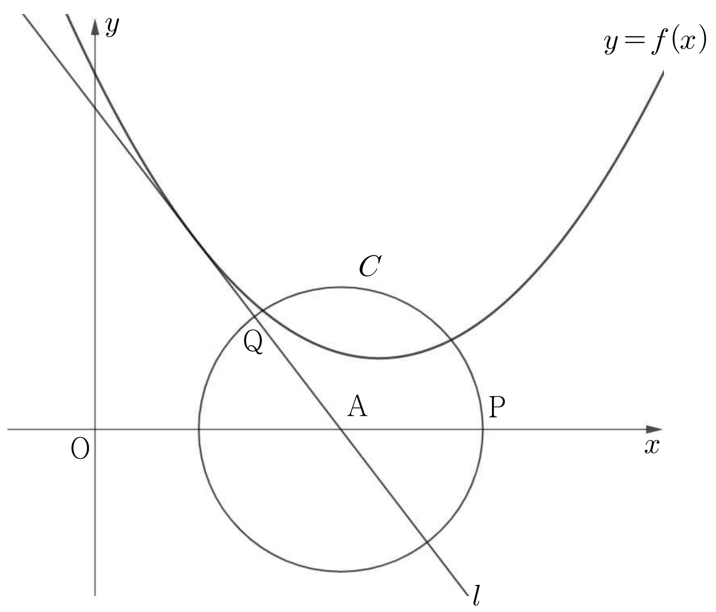
① $\frac{9}{28}$ ② $\frac{9}{14}$ ③ $\frac{27}{28}$ ④ $\frac{9}{7}$ ⑤ $\frac{45}{28}$

46. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[n,\ n+1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M_n, m_n이라 할 때, $M_1=M_2=M_3=1$이다.

$27|m_1+m_2+m_3|$의 값을 구하시오.

47. 그림과 같이 함수 $f(x)=\frac{1}{2}(x^2-4x+5)$와 실수 $t(t<2)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선을 l이라 할 때, 직선 l이 x축과 만나는 점을 A, 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 C라 하자. 원 C가 x축과 만나는 점 중 x좌표가 최대인 점을 P, 원 C가 직선 l과 만나는 점 중 x좌표가 최소인 점을 Q라 할 때, 호 PQ의 길이를 $g(t)$라 하자. $10|g'(1)|$의 값을 구하시오.



48. 최고차항의 계수가 1이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq 0$인 이차함수 $f(x)$와 $x>0$에서 극댓값을 갖는 함수 $g(x)=(x^2+ax+b)e^{1-x}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 함수 $g(f(x))$, $g\left(\frac{1}{f(x)}\right)$는 오직 하나의 극값을 가진다.
(나) 함수 $g(f(x))$는 $x=1$에서 극값 3을 가진다.

$f(1)$이 최소일 때, $a+b+f(2)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.)

49. 두 실수 a, $b(b>1)$에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} xe^{-x}-a & (x \le b) \\ |xe^{-x}-a| & (x>b) \end{cases}$$

이다. 실수 m에 대하여 점 $(0,\ k)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(m)$이라 하자. 함수 $g(m)$가 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 연속이기 위한 k의 범위는 $k \ge \beta$이고, 구간 $(0,\ \infty)$에서 연속이기 위한 k의 범위는 $k \le -\beta$이다. $f(b)=0$일 때, 양수 a의 값은? (단, $\beta>0$)

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{2}{e^2}$ ③ $\frac{3}{e^3}$ ④ $\frac{4}{e^4}$ ⑤ $\frac{5}{e^5}$

50. 실수 전체의 집합에서 연속이고 $f(0)=0$인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(e^x-1)g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

를 만족시킨다. 음수 k에 대하여 구간 $[k,\ \infty)$에서

$$f(x)-g(x) \ge 0$$

을 만족시키기 위한 k의 최솟값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

51. 실수 t와 음수 p에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=p(x-t)+|p(x-t)|$$

일 때, 연속함수 $g(t)$는 모든 실수 t에 대하여

$$\{g(t)\}^2=\int_{f(0)}^{f(\pi)}\sin x dx$$

를 만족시킨다. 두 집합

$$A=\left\{t \,\middle|\, \int_0^t g(t)dt=0\right\},\quad B=\{t\,|\,t\le 0 \text{ 또는 } t\ge\pi\}$$

에 대하여 $A=B$일 때, $|p|$의 최솟값을 구하시오.

52. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$가

$$x\le p\text{일 때, } g(x)=\left|\int_1^x f(t)dt\right|$$

$$x>p\text{일 때, } g(x)=\int_3^x |f(t)|dt$$

를 만족시킨다. 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서만 미분가능하지 않고, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 β라 할 때 $\beta>1$이고, $f\left(\beta+\frac{1}{2}\right)<0$이다. $f(\alpha+1)$의 값은?

① -24 ② -16 ③ -8 ④ 16 ⑤ 24

53. 정수 k에 대하여 함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\sin x \quad ((n-1)\pi \le x < n\pi)$$

일 때, 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 < a_n < a_{n+1}$
> (나) $\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx = \frac{1}{n^2+n}$

$\lim_{n\to\infty} a_n - a_1 \le \pi$이고, $\frac{a_1}{\pi}$가 정수일 때, a_1이 될 수 있는 수를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 b_1, b_2, $\cdots$, b_m(m은 자연수)라 하자. $\sum_{i=1}^{m} b_i = 20\pi$일 때, k가 될 수 있는 모든 수의 합을 구하시오.

54. 실수 k $\left(k \ne \frac{1}{2}\right)$에 대하여 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=4x^3-3ax^2+\int_{-k}^{k} f(x)dx$$

를 만족시킨다. 함수 $|f(x)|$가 $x=p$에서 미분가능하지 않은 실수 p의 개수를 $g(k)$라 하자. 함수 $g(k)$가 구간 $\left(\frac{1}{2},\ \infty\right)$에서 연속이기 위한 실수 a의 최댓값은 M이다. $4M^2$의 값을 구하시오.

문제 번호	정답	10	④	20	④	30	509	40	①	50	④
1	28	11	18	21	16	31	②	41	⑤	51	2
2	36	12	32	22	4	32	③	42	10	52	①
3	③	13	7	23	16	33	①	43	30	53	17
4	⑤	14	7	24	16	34	②	44	③	54	27
5	72	15	②	25	0	35	⑤	45	⑤		
6	25	16	4	26	⑤	36	11	46	59		
7	④	17	④	27	①	37	5	47	5		
8	8	18	①	28	③	38	①	48	4		
9	①	19	10	29	⑤	39	③	49	②		