수능 수학 핵심을 스피드 하게

저자 이 기 준
임 병 주

orbibooks.com

책소개

수능 수학 핵심을 스피드하게(수핵스)교재는 크게 Part 1과 Part 2로 나누어집니다.

"Part 1"은 실전에서 이용할 수 있는 정말 필요한 핵심 43가지의 Point로 이루어져 있으며, "Part 2"은 문제 전반에 걸쳐 필요한 실전 도구를 훈련하는 교재로 기본 Point와 심화 Point로 나누어 집니다.

Part 1과 Part 2는 독립적으로 공부하는 것이 아니라, Part 1을 학습하면서 동시에 Part 2를 통해 필요한 도구를 훈련해 가는 것으로 책의 두 파트를 동시에 공부해야 좋은 시너지 효과를 낼 수 있도록 구성하였습니다.

Part 1. 본문편

"Part 1 – 본문편" 은 미적분2 19가지 Point, 기하와 벡터 10가지 Point, 확률과 통계 14가지 Point로 총 핵심 포인트 43가지로 이루어져 있습니다.

기출문제를 풀면서 가져야 하는 최소한의 도구를 바탕으로 실전에서 어떻게 문제를 일관되게 해결할지에 대한 내용으로서 기출문제(수능, 평가원, 교육청, 사관학교)를 바탕으로 훈련할 수 있는 파트입니다.

이 실전 Point들을 바탕으로 지금까지 출제되었던 수능, 평가원, 교육청, 사관학교를 가리지 않고 기출문제에 적용 훈련하면서 기출에 녹아 있는 Code를 학습할 것입니다. 또한 아직 기출에서 출제되지 않은, 앞으로 출제될 수 있는 유형의 문제들에 대한 포인트도 정리하였습니다.

그리고 몇몇 Point를 학습하시면서 심화 내용이나 실전 현장에서 가져야할 행동영역을 [Eureka Point]에서 학습하실 수 있습니다. 또한 실전 현장에서 어려운 문제들 및 호흡이 긴 문제들의 경우에는 [Algorithm]에서 정리하여 체화하기 쉽도록 구성하였습니다.
그리고 문제에서 실전에서 유용한 [Tip]등을 통해 실전에서 어떻게 푸는 것이 도움이 될 지에 대한 현실적인 방안들도 생각할 수 있게 구성하였습니다.

ORBIBOOKS.COM

Part 2. 도구편

"Part 2- 도구편(Appendix)"은 미적분2, 기하와 벡터, 확률과 통계를 개별적으로 나누어서 다루는 것이 아니라 문제 해결에 필요한 ① 실전 도구, ② 특정 Killer로 출제 되는 테마별 문항, ③ 빠른 풀이 이 3가지를 훈련할 수 있도록 단원에 구애없이 구성하였습니다.

Part 2는 기본 파트와 심화 파트로 나누어져 구성되어 있습니다.
기본 파트에서는 미정계수와 관계식, 보조선 그리기, 최대와 최소, 함수, 접선, 중복조합의 심층적 이해 등 수능 수학에서 빠뜨릴 수 없는 중요한 문제들을 해결할 수 있는 도구를 배웁니다. 심화 파트에서는 벡터방정식과 벡터의 층 이론, 미적분의 근본 정리와 변화율, 함수의 극한 Speed 풀이(난짱극), 평면 구면상의 점을 표현하는 방법(구면 좌표계)와 같이 조금은 어려울 수 있는 도구들을 배워 수학적 사고를 심화시킬 수 있는 내용과 빠른 풀이를 훈련하여 시간 단축에 필요한 내용들을 학습할 수 있습니다.

많은 공부는 필요 없습니다. 해야 할 공부만 하면 됩니다.
수학은 대학을 가는데 있어서 더 이상 가장 중요한 과목은 아닙니다.
더욱 더 빠르고, 간결하며 정확하게 수능 수학을 대비해야 합니다.

저희 책 수능 수학 핵심을 스피드하게(수핵스)는 이러한 면에서 가장 완벽한 책이라고 자부할 수 있습니다.
주변의 수 많은 저자들과의 만남과 그들의 저서를 통해서 제가 느낀 점과 저자분들의 조언을 통해 지금 이 책이 탄생하였습니다.

기존의 책과는 다른 내용과 방식으로 이 책을 증명하도록 하겠습니다.
간결하면서도 알차면서도 그 이상의 내용까지 담은 수핵스로 2020학년도 대학수학능력시험을 대박나시길 기원합니다.

저자소개

이기준(울산대학교 의예과) | 임병주

서평

이해원 (오르비 역대 최고의 베스트셀러 저자)

안녕하세요. 오르비 역대 최대 베스트셀러&스테디셀러 저자 이해원입니다.

이 서평은 제가 처음으로 쓰는 서평이며 그만큼 추천하는 책이기도 합니다.

먼저, 수핵스는 수능에 가장 필요한 부분만을 스피드하게 대비할 수 있도록 잘 요약한 책이라고 볼 수 있습니다. 요즘과 같은 수능 시험에 100점을 받기는 참 어렵지만, 96점은 꽤 많이 받아가는 현실에서 96점까지 받는 것은 이 교재를 활용하면 정말 빠르게 달성할 수 있다고 생각합니다. 물론, 이 책을 더 잘 활용하여 100점을 받을 수도 있을 것입니다.

책의 저자는 한 때 저에게서 수학을 배웠고 수능과 수리논술 등 모든 면에서 가장 훌륭한 학생 중 하나였습니다. 메이저 의대를 진학하여 지금도 대학에서 훌륭한 성적을 거두고 있다는 점에서 오르비의 검증되지 않은 많은 저자와는 명백히 차이점을 갖고 있습니다. 제가 누구인지 알기에 그만큼 추천 드리고 싶은 책입니다.

제가 확신할 수 있는 것은, 실력과 대학 모든 것이 검증된 저자에게 '가장 효율적인 방법을 배울 수 있다.'라는 것입니다. 정확한 방법론이나 근거도 없이 교과서만 강조하는 무책임한 수많은 책들과는 명백히 다르며 현실적으로 수능에서 가장 빠르게 점수를 올리는 방법을 담은 책이라 보면 됩니다.

이 책은 과정에도 충실하였습니다. 종종 어떤 책들은 양이 많은 것에 비해 과정이 불분명한 경우도 많은데, 그런 점을 비추어 볼 때 이 책은 충분한 정당성과 명쾌함을 확보하였다고 생각합니다. 이는 드러나 있는 기출 분석 방법뿐만 아니라 새롭게 출제되는 문제에까지도 좋은 영향을 주게 될 것입니다.

길게 설명 드릴 필요는 없을 것 같습니다. 저는 책 제목 그대로는 물론, 이를 잘 활용한다면 저자가 요구하는 것 이상을 뽑아낼 수 있을 것이라 확신합니다. 여러 번 반복해서 이 책의 모든 것을 완벽하게 공부하길 권합니다.

ORBIBO OKS.COM

이덕영 (포카칩, 대학생 실모의 원조)

이 책의 저자는 책을 처음 집필하지만, 다년간의 수험 기간 및 학생 지도 경험을 토대로 효율적으로 대학수학능력 시험을 대비할 수 있는 내용들로 책을 구성하였습니다.

보통 이 책의 저자에 대해서 너무 내용이 과하지 않을까 하는 편견을 가질 수 있지만, 책을 펼쳐보면 정말 이정도로 충분할까 싶을 정도로 핵심적인 내용 위주로 간결하게 담겨 있음을 확인할 수 있습니다. 몇 개의 문제를 제외하고는 전반적으로 쉽게 출제되는 지금의 수능 기조에서는 이 책에서 다루는 내용을 잘 이해하고 자기 것으로 만드는 것만으로도 수능 시험을 대비하기에 충분할 것으로 보이며 부족한 부분들은 스스로 추가적인 문제를 해결해나가는 것으로 보충할 수 있을 것입니다.

한편, 또 하나 눈여겨볼 점은 이 책의 수학적 완성도 및 시험에 대한 태도는 저자가 왜 의대생인지를 여지없이 보여주는 책이라고 생각합니다. 단순히 수학 공부를 하는 것을 넘어서서, 저자가 주어진 시험을 어떠한 관점으로 대비하는지를 배운다면, 책을 보는 3개월이 아닌 대학교 이후 계속해서 만나는 시험들에도 영향을 많이 받을 수 있으리라 확신하며, 그 점이 이 책이 갖는 중요한 지점인 것 같습니다.

따라서 책을 볼 때에는 수학적인 내용도 중요하지만, 저자의 생각과 태도가 드러나는 부분들도 유심히 읽어보며 필요한 부분을 반드시 스스로의 것으로 만들기를 권합니다.

CONTENTS

차 례

수핵스 (상)

■ 미적분2

■ 기하와 벡터

수핵스 (하)

■ 확률과 통계

ORBIBOOKS.COM

기하와 벡터 | # 1. 평면곡선

평면곡선은 두 가지 파트로 나누어집니다.
첫 번째 파트는 이차곡선(포물선, 타원, 쌍곡선)의 정의를 이용한 문제를 해결하는 파트이고, 두 번째는 평면곡선의 접선으로 음함수의 미분법과 매개변수의 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 세우는 파트입니다.
두 번째 파트는 Part 2 교재의 Appendix Point 5- 접선에서 다루고
Part 1 교재에서는 평면곡선의 접선을 따로 다루지 않도록 하겠습니다.
평면곡선 문제를 해결하는 데 있어서 가장 핵심 포인트는 정의를 이용하는 것입니다. 문제를 풀 때, 의식적으로 "무조건" 먼저 해야 할 일은

'이차곡선의 정의 그림을 완성 한다'

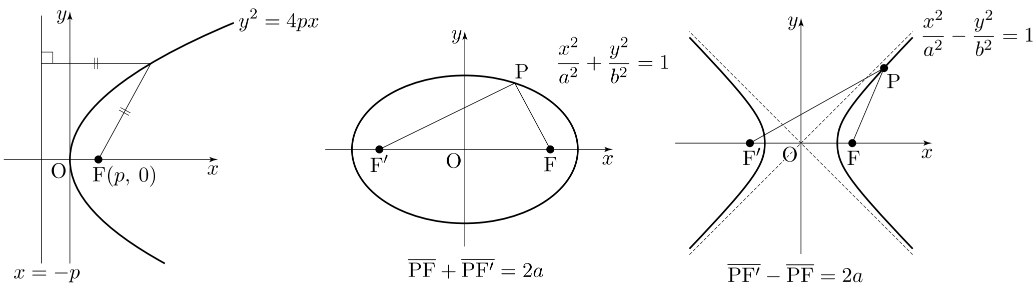
입니다.

간혹, 2013년 대학수학능력시험 수학 가형 18번 문제[23]에서처럼 초점 공식($\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{p}$)을 이용하여 풀면 빠르게 풀 수 있는데 이에 혹하여, 이차곡선에서 공식을 이용해서 문제를 푸는 것이 '주'가 되어서는 안 됩니다.
정의를 이용한 정석 풀이를 '우선적'으로 하고, 특수한 공식을 이용한 풀이는 '부차적' 으로 해야 합니다.
정의를 이용한 풀이+ 공식을 이용한 풀이[24]를 잘 병용할 수 있다면, 이차곡선 문제를 빠르게 해결할 수 있습니다.

(1) 포물선
초점 $\mathrm{F}(p, 0)$에서 포물선 위의 점까지의 거리는 포물선 위의 점에서 준선까지의 거리와 같다.
(2) 타원
타원 위의 점에서 두 초점 사이의 거리의 합은 장축의 길이($2a$)와 같다.
(3) 쌍곡선
쌍곡선 위의 점에서 두 초점 사이의 거리의 차[25]는 주축의 길이($2a$)와 같다.

23) Point 1- 예제 4번 문제를 참고하도록 합시다.
24) 공식을 이용한 풀이는 Point 3에서 배웁니다.
25) '차'는 절댓값임을 주의하자.

Point 1 이차곡선 정의 그림의 완성



[이차 곡선의 정의 그림]

이차곡선 정의 그림을 완성한 후 어떤 길이의 값을 구하라는 경우가 많습니다.
이때, 가장 중요한 것이 길이를 변수로 잡아야 한다는 것입니다.
(길이를 변수로 잡을 것 인지, 좌표를 변수로 잡을 것인지는 Eureka Point 1에서 다루겠습니다.)

길이를 변수로 잡고 관계식을 세워, 방정식을 풀면 됩니다.
관계식을 만들 때 정의를 이용하여 한 문자에 대한 식을 세우고,
1) 피타고라스의 정리, 2) 도형의 닮음 성질, 3) 각도사이의 관계(특수 각)를 이용하여 관계식을 세웁니다.

Point 이차곡선 정의 그림의 완성

1. 정의 그림을 완성하여 이차곡선의 정의를 활용한다.
2. 구하고자 하는 부분과 연관된 길이를 변수로 잡아 관계식을 세워야 한다.
   ① 피타고라스의 정리를 이용해서 관계식을 세운다.
   ② 도형의 닮음 성질을 이용해서 관계식을 세운다.
   ③ 각도 사이의 관계 (특수 각, 정다각형) 을 이용해서 관계식을 세운다.

*주의 1: 한 문자에 대한 관계식을 세웠을 때, 양변이 같아지는 결과가 나오면 관계식을 잘못 세웠음을 인지해야 한다. 최대한 정의를 이용해서 식을 다시 세워야 한다.
*주의 2: 정의를 이용한 풀이를 "우선적"으로 하고, 특수한 공식을 이용한 풀이는 "부차적"으로 해야 한다.

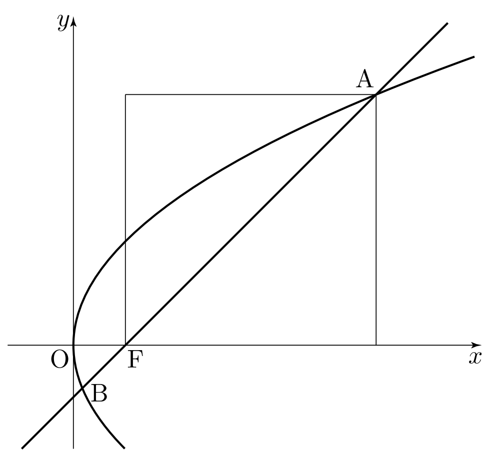
Eureka Point ① 변수잡기 : 길이를 변수로 vs 좌표를 변수로

이차곡선 문제에서 길이를 변수로 잡지 않고, 좌표를 변수로 잡아 말리는 경우가 많은데, 길이를 변수로 잡으면 쉽게 풀리는 문제를 좌표를 변수로 잡아서 문제를 풀었다든지, 아니면 그 반대의 경우입니다. 다음 아래의 기출 문제를 좌표로 푸는 풀이와 길이를 변수로 잡는 풀이로 해결해보도록 합시다.

예제 2013학년도 9월 모의평가 수학 가형 26번

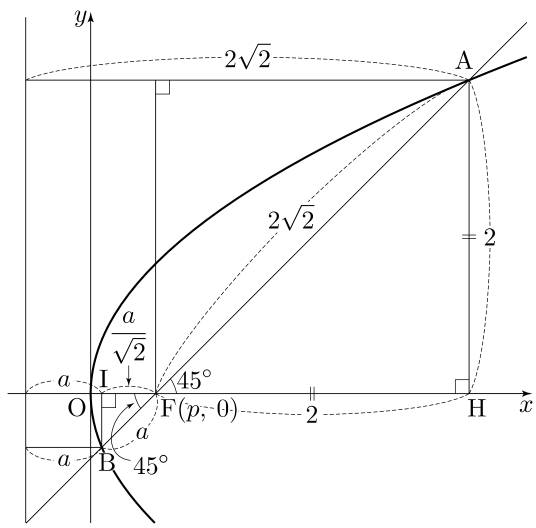
그림과 같이 좌표평면에서 꼭짓점이 원점 O이고, 초점이 F인 포물선과 점 F를 지나고 기울기가 1인 직선이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AF를 대각선으로 하는 정사각형의 한 변의 길이가 2일 때, 선분 AB의 길이는 $a+b\sqrt{2}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오.

(단, a, b는 정수이다.)



풀이 1) 길이를 변수로 잡아서 푸는 풀이 – $\overline{\mathrm{FB}}=a$

이차곡선에서 가장 먼저 해야 할 일은 무조건 정의 그림을 이용해서 문제를 풀어갈 생각을 해야 합니다. 포물선에서 정의 성질을 이용하기 위해 정의 그림을 완성하면 다음과 같습니다.

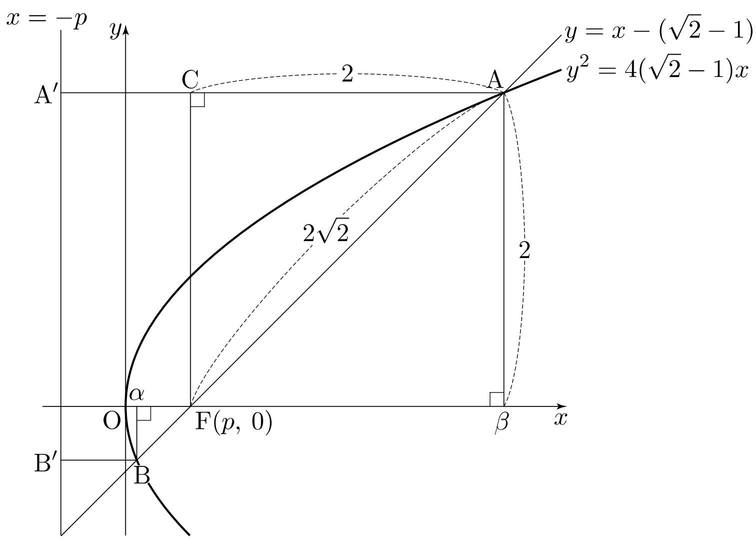


정의 그림을 완성 한 후 우리가 구하고자 하는 답은 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{FB}}=2\sqrt{2}+\overline{\mathrm{FB}}$ 이므로, $\overline{\mathrm{FB}}$ 의 길이만 구하면 됩니다. 따라서 구하고자 하는 길이 $\overline{\mathrm{FB}}=a$라고 길이를 변수로 둔 후 문제의 조건을 이용하여 관계식을 세워야 합니다.

발문의 조건에 따르면, 정사각형이라고 했으므로, $\angle \mathrm{AFH}=45^\circ$ 입니다.
따라서 맞꼭지각에 의하여 $\angle \mathrm{BFI}=45^\circ$ 입니다. 특수각을 이용하여
$\overline{\mathrm{FI}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 이므로, $a+\frac{a}{\sqrt{2}}+2=2\sqrt{2}$ 입니다. 이를 정리해서 a의 값을 구하면
$a=-8+6\sqrt{2}$ 입니다.
구하고자 하는 답은 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}=2\sqrt{2}+(-8+6\sqrt{2})=8\sqrt{2}-8$ 입니다.
$a^2+b^2=128$ 입니다.

답 : 128

풀이 2) 좌표를 변수로 잡아서 푸는 풀이



[그림]

[그림]과 같이 포물선의 방정식을 $y^2=4px$라 하면, 초점은 $\mathrm{F}(p, 0)$입니다.

문제에서 정사각형의 한 변의 길이가 2이므로, $\overline{\mathrm{AF}}=2\sqrt{2}$ 이고,

$\overline{\mathrm{CA'}}=2\sqrt{2}-2=2p$이므로, $p=\sqrt{2}-1$입니다.

이 때, $\begin{cases} y^2=4(\sqrt{2}-1)x \\ y=x-(\sqrt{2}-1) \end{cases}$ 의 교점의 x좌표를 각각 $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$라 하면,

구하고자 하는 답은 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}=(\beta+p)+(\alpha+p)=2p+(\alpha+\beta)$이므로,

포물선의 방정식과 직선의 방정식을 연립해서 정리하면

$x^2-6(\sqrt{2}-1)x+(3-2\sqrt{2})=0$의 두 근이 α, β이므로,

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $\alpha+\beta=6\sqrt{2}-6$입니다.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}=2p+(\alpha+\beta)&=2(\sqrt{2}-1)+(6\sqrt{2}-6)\\&=8\sqrt{2}-8\end{aligned}$$

따라서, $a=8$, $b=-8$이므로, $a^2+b^2=128$입니다.

답 : 128

이 문제를 해결할 때 1) 길이를 변수로 잡아서 풀 든, 2) 좌표를 변수로 잡아서 풀 든 둘 다 좋은 풀이입니다. 다만, 대부분의 문제는 좌표를 변수로 잡아서 푸는 풀이보다는 길이를 변수로 잡아서 푸는 것이 더 깔끔하게 정리가 됩니다.

따라서 문제를 풀 때, 길이를 변수로 잡는다는 생각을 '우선적'으로 하시고, 구하고자 하는 길이와 관련 있는 부분을 변수로 잡은 뒤,

(1) 피타고라스의 정리,

(2) 닮음의 성질,

(3) 각도 사이의 관계 (특수각, 정다각형)의 성질

이 세 가지를 적절히 이용합시다.

Point 1 이면각의 해법

이면각 문제에 대한 해법 - '삼수선의 정리'에 관하여 설명 하겠습니다.
수능 및 평가원에서 많은 비중을 차지하고 있는 문제 중 하나가 삼수선의 정리를 통한 이면각의 크기를 구하는 문제입니다. 순수 공간도형에서 주로 많이 출제되는 문제 유형이고 기본적으로 삼수선 정리에 대한 작도문제라고 생각하시면 됩니다.
공간 도형의 방정식 유형에서는 단지 법선벡터가 이루는 각으로 문제를 처리하지만, 순수 공간 도형의 문제에서는 '삼수선의 정리' 작도법에 대해서 잘 알아야 문제를 풀 수 있습니다. 3 가지 삼수선의 정리에 대하여 잘 알고 있어야 합니다.

이면각 문제의 알고리즘을 살펴보면 다음과 같습니다.
이면각 문제는 정사영에 대해 물어보거나 이면각에 대한 각을 θ라 정의한 뒤 $\cos\theta$의 값을 구하는 식의 문제로 출제가 되고 있는데, 다음과 같은 4가지 방법으로 풀 수 있습니다.

[Type 1] 삼수선의 정리를 이용한 이면각의 작도 [연계 : App 2- 보조선 그리기]
[Type 2] $S' = S\cos\theta$ - 정사영 된 넓이를 이용해서 이면각을 구하는 방법
[Type 3] 두 평면의 법선벡터가 이루는 각
[Type 4] 좌표 풀이 및 벡터 방정식을 도입하는 방법

위의 순서대로 1, 2, 3, 4 중요도가 있지만, 각 문제마다 기본적으로 어떤 방법이 유리할 지에 대한 생각 해야합니다.

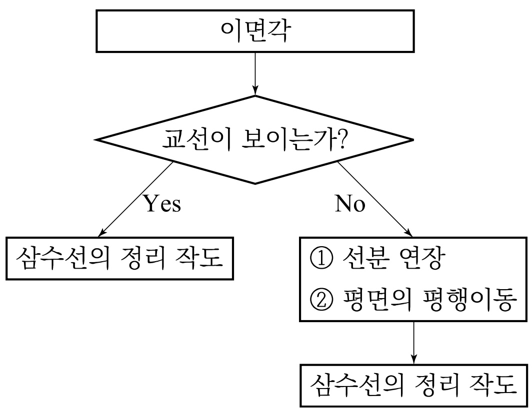
[Type 3]인 두 평면의 법선벡터가 이루는 각은 가끔 방향 코사인 이라는 도구를 사용하면 매우 쉽게 문제가 풀리는 경우가 있기 때문에 교과 외이기는 하지만, 저희 책에서는 매우 중요한 포인트로 강조하여 Eureka Point 3-방향코사인에서 다루어 문제를 해결하는 데 하나의 새로운 도구로 활용하겠습니다.

Type 1 삼수선의 정리를 이용한 이면각의 작도

삼수선의 정리를 이용한 이면각의 작도는 다음과 같은 상황에서 이용해야 합니다.
‘순수 공간도형’ 및 ‘공간도형 방정식’의 이면각 문제는 삼수선의 정리를 제일 우선으로 생각하고, 이 때 교선이 보이는지의 여부를 기준으로 문제를 나눈 후 삼수선의 정리를 적용하여 문제를 풀어야 합니다.

[1] 교선이 보이면, 교선에 양쪽 직각을 그어 삼수선 정리를 완성하고,
[2] 교선이 보이지 않는다면,
① 선분을 연장, ② 평면을 평행 이동하는 방법으로 교선을 만들어내어 삼수선의 정리를 완성하여 문제를 풉니다.

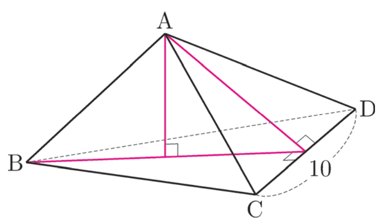
이를 요약해서 정리하면 다음과 같은 알고리즘을 만들 수 있습니다.



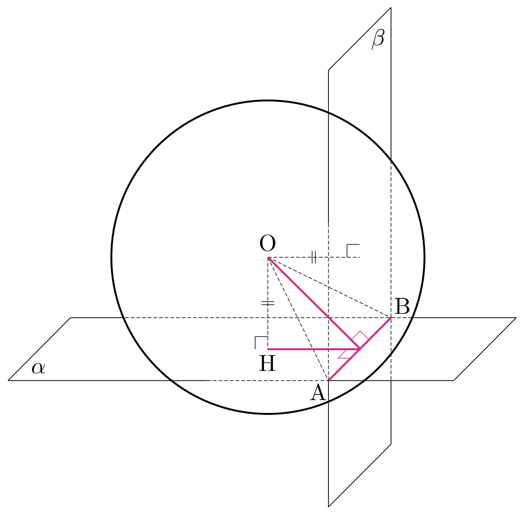
※ 삼수선의 정리를 이용한 작도

이면각의 해법은 크게 앞서 나눈 것처럼
① 삼수선의 정리, ② 정사영 해석, ③ 법선벡터가 이루는 각, ④ 좌표도입으로
풀 수 있습니다. 그 중에서도 삼수선의 정리는 순수 공간도형에서 작도를 할 수 있어야 풀리기 때문에, 출제된 기출 문제를 바탕으로 삼수선 작도를 훈련하여야 합니다.

교과서의 삼수선의 정리 작도를 직접 손으로 그려보는 것이 제일 좋은 방법입니다.
아래 도형에 삼수선을 작도해 봅시다.



[그림 1] 평면 ACD와 평면 BCD가 이루는 각



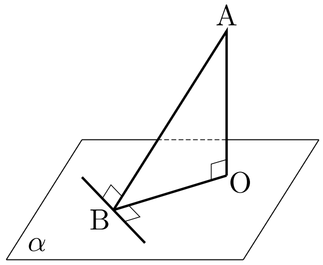
[그림 2] 평면 OAB와 평면 α가 이루는 각

[그림 1]을 봅시다. 평면 ACD와 평면 BCD가 이루는 각을 물어보고 있으므로, 이면각 작도를 해야 합니다. 점 A와 점 B에서 두 평면의 교선인 $\overline{\mathrm{CD}}$에 양쪽 직각을 그어야 합니다.

[그림 2]는 평면 OAB와 평면 α가 이루는 각을 물어보고 있으므로, 이면각 작도를 해야 합니다. 점 O에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라고 했을 때, 삼각형 OAB와 삼각형 HAB가 이루는 각을 생각하면 됩니다. 점 O와 점 H에서 두 평면의 교선인 $\overline{\mathrm{AB}}$에 양쪽 직각을 그어야 합니다.

두 문제 모두 삼수선 작도를 통해 이면각의 크기를 물어보고 있는 문제로
형태만 다를 뿐, 같은 문제임을 알 수 있습니다.

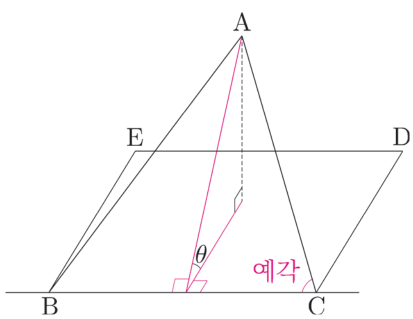
교선이 보이는 경우



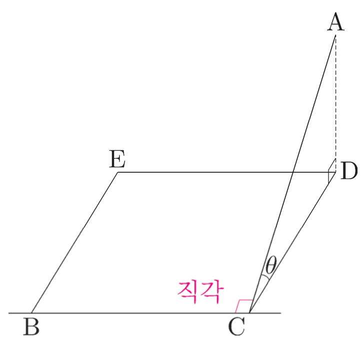
[그림 1] 삼수선의 정리 작도

삼수선의 정리에 대해 설명을 추가 해보자면, 우선 위 [그림 1]이 눈에 익어야 합니다.
삼수선의 정리에서 가장 핵심은 '**교선**' 입니다.
문제마다 삼수선의 정리를 이용하는데 있어 가장 중요한 포인트는 교선을 기준으로 생각하여야 한다는 것입니다.
먼저 이면각은 교선이 보이는가, 교선이 보이지 않는가를 기준으로 생각을 하여야 합니다.

교선이 보이는 경우, 삼수선 정리를 쓸 때에 주의할 점을 봅시다.
가장 핵심적인 요소는 교선에 양쪽 직각을 그을 때 평면에 포함된 각이 예각, 둔각, 직각에 따라서 수선의발이 떨어지는 위치가 달라집니다. 아래의 [그림 2]를 봅시다.



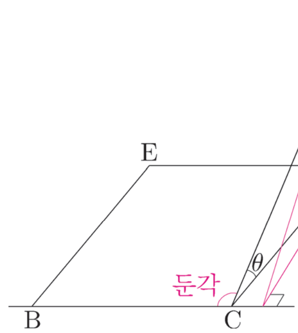
[그림 2-1] 평면이 예각을 포함하는 경우



[그림 2-2] 평면이 직각을 포함하는 경우

위의 [그림 2-1]과 같이 평면에 포함된 각이 예각인 경우는 다음과 같이 점 A에서 평면 BCDE에 수선의 발을 떨어뜨린 뒤, 교선 $\overline{BC}$를 향해 수선의 발을 떨어뜨려 삼수선의 정리를 작도하면 됩니다.

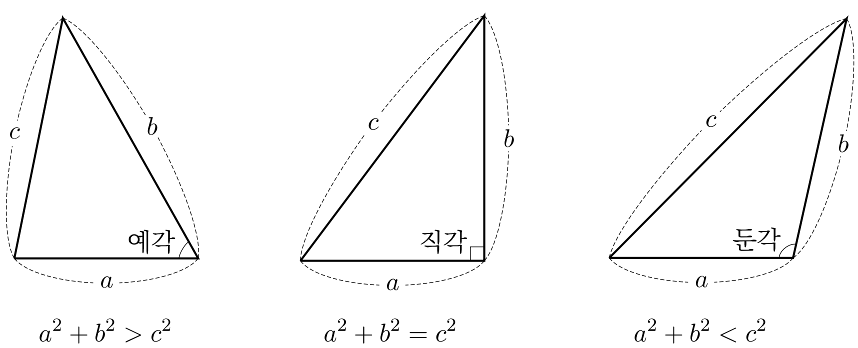
마찬가지로 [그림 2-2]와 같이 평면에 포함된 각이 직각인 경우에는 점 A에서 떨어뜨린 수선의 발이 D가 되는 경우이므로, ∠ACD가 두 평면이 이루는 이면각이 됩니다. (여기서 평면은 삼각형 ABC를생각하면 됩니다.)



[그림 2-3] 평면이 둔각을 포함하는 경우

이제 마지막으로 위의 [그림 2-3]과 같이 평면에 포함된 각이 둔각인 경우는 앞의 두 가지 경우와 다르게 약간 주의를 요해야 합니다. 앞의 두 가지 경우는 모두 교선에 양쪽 직각을 긋기 위한 수선의 발이 평면의 내부에 떨어졌지만, <u>평면이 둔각을 포함하는 경우</u>에는 양쪽 직각을 긋기 위한 <u>수선의 발이 평면의 외부에 떨어지게 됩니다.</u> (수선의 발이 삼각형 ABC밖에 떨어집니다.) 위와 같은 케이스가 킬러문제로 두 차례 출제된 바가 있는데, 2014년 5월 예비평가 30번, 2011년 9월 모의평가 25번으로 출제 되었습니다. 이 문제는 뒤의 실전 문제 적용해서 직접 살펴보면서 다시 한 번 차근차근 작도하는 훈련을 해보도록 합시다.

간혹, 평면이 예각, 직각, 둔각 중 어떤 종류의 각을 포함한 지가 명확하게 보이지 않을 경우에 어떤 각을 포함한 평면인지를 알기 위해서 피타고라스의 정리를 이용해야 합니다. 빗변의 길이를 c, 남은 두 변의 길이를 a, b로 하는 삼각형 ABC에 대하여, 다음 아래의 그림과 같은 식이 성립하면 삼각형의 종류를 파악할 수 있습니다.



삼수선의 정리를 이용하여 이면각 작도를 하는 경우에 위의 3가지 경우와 같이 평면이 어떤 각을 포함하는지를 아는 것이 중요합니다.
즉, 정리하면 평면에 포함된 각이 1) 예각, 직각이면 평면의 내부에 수선의 발이 떨어지고, 2) 둔각이면, 평면의 외부에 수선의 발이 떨어진다고 요약할 수 있습니다. (여기서 평면 내/외부는 사각형 BCDE 내/외부를 의미합니다.)

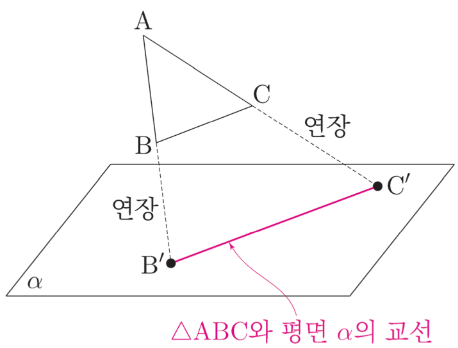
교선이 보이지 않는 경우

그렇다면 교선이 보이지 않는 경우는 어떻게 해야 할까요?
삼수선의 정리를 작도하기 위해서는 교선이 필요하기 때문에, 교선을 만들어내야만 합니다. 교선을 그려내는 방법은 두 가지가 있는데 다음과 같이 교선을 만들어내시면 됩니다.

1.교선을 찾기 위해 선을 연장하는 방법

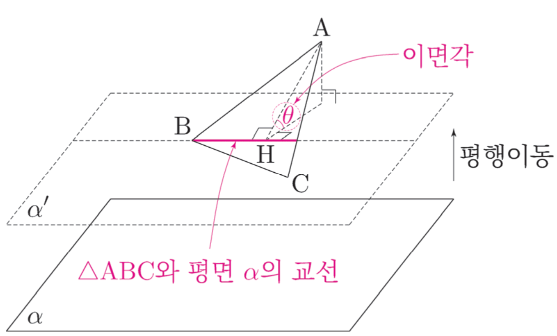
2. 교선을 찾기 위해 다른 평면을 평행이동 시키는 방법

(1) 교선을 찾기 위해 선을 연장하는 방법



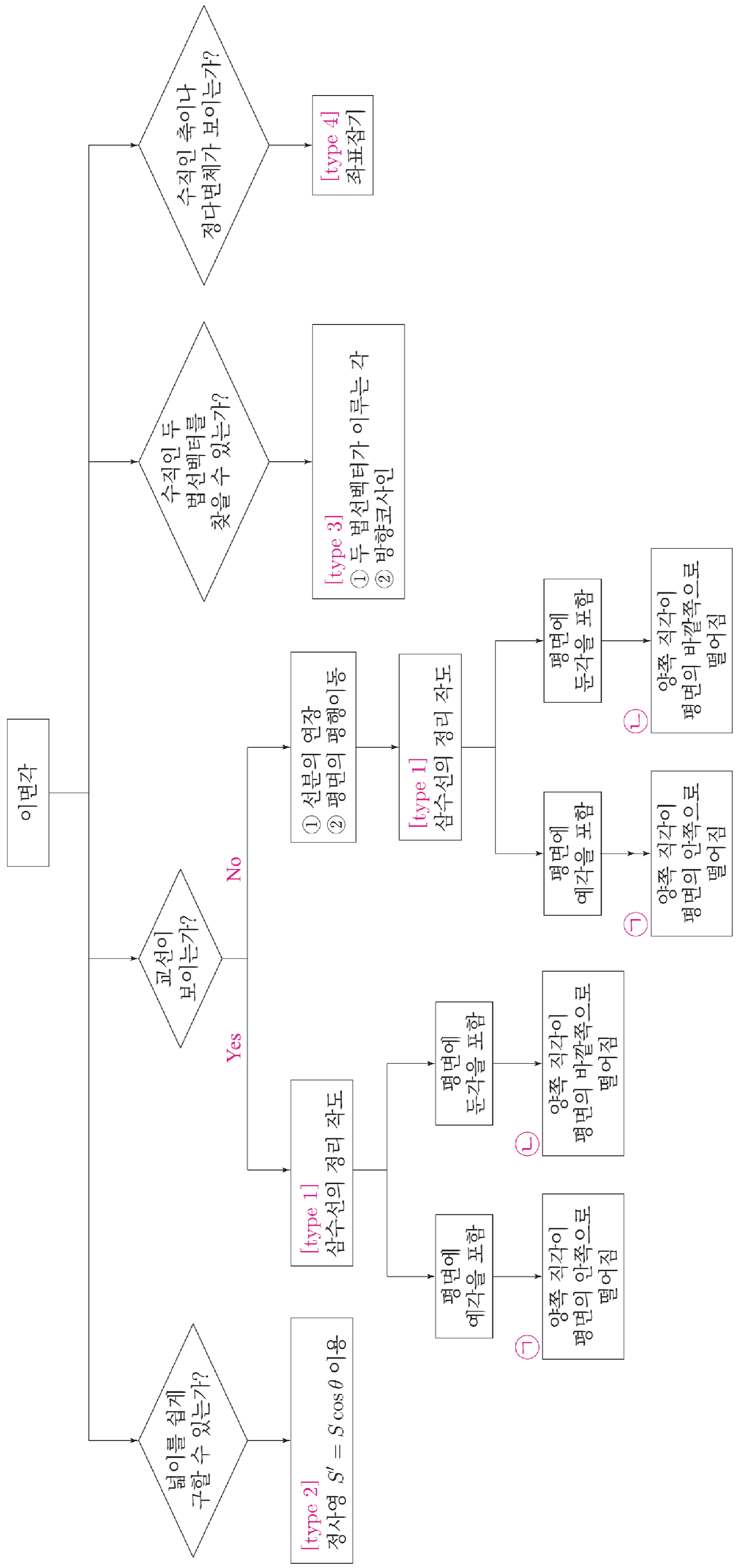
교선이라는 것은 결국은 선분이고, 선분 및 직선은 두 점으로 이루어져 있습니다.
만약 교선이 없더라도 대부분 두 평면의 교점이 하나는 나오기 마련입니다. 따라서 두 평면의 다른 교점을 한 개만 찾으면 두 점을 이은 선이 곧 교선이 됩니다.

(2) 교선을 찾기 위해 다른 평면을 평행이동 시키는 방법



평면 자체를 평행 이동시켜 두 평면이 선에서 만나도록 이동 시키는 방법인데, 평면 ABC에 평면 α와 평행한 선을 포함하는 지를 확인하고, 평면 α를 평행 이동하는 방법입니다.

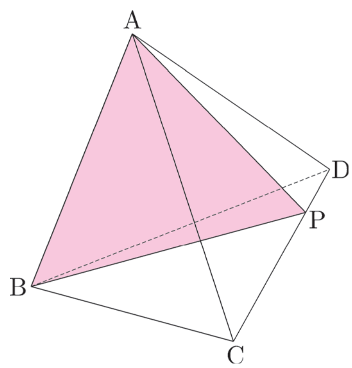
Algorithm ① 이면각의 해법



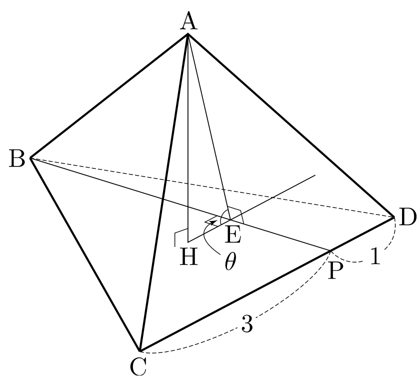
이제 지금까지 배웠던 [Type 1]~[Type 4]의 여러 가지 방법을 이용하여
문제를 풀어봅시다.

예제 1 2012년 7월 교육청 수학 가형 21번

그림과 같이 정사면체 ABCD의 모서리 CD를 3:1로 내분하는 점을 P라 하자. 삼각형 ABP와 삼각형 BCD가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)



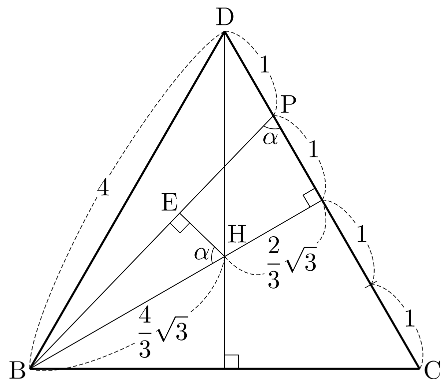
[Type 1] 삼수선의 정리를 이용한 이면각의 작도



[그림]

삼각형 ABP와 삼각형 BCD가 이루는 각을 구해야 하는 문제입니다.

교선이 $\overline{BP}$임을 쉽게 알 수 있기 때문에, 점 A에서 삼수선의 정리에 따라 위 [그림]과 같이 작도할 수 있습니다.정사면체의 한 변의 길이를 4라 하면, $\overline{AH} = \frac{\sqrt{6}}{3} \times 4$로 정해져 있으므로, $\overline{HE}$의 길이를 알아내면, $\cos\theta$를 구해낼 수 있습니다.



[그림]

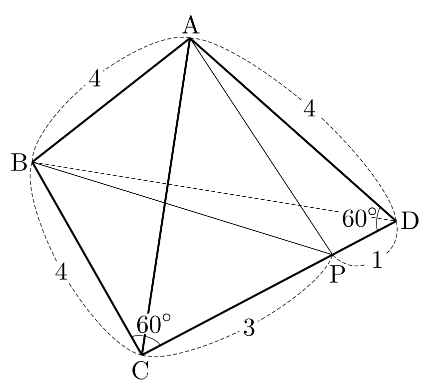
삼각형 BCD 를 위에서 바라본 모습은 다음 [그림]과 같고, 점 B 에서 $\overline{\mathrm{CD}}$ 에 수선의 발을 내리면 위 [그림]과 같이 됩니다.

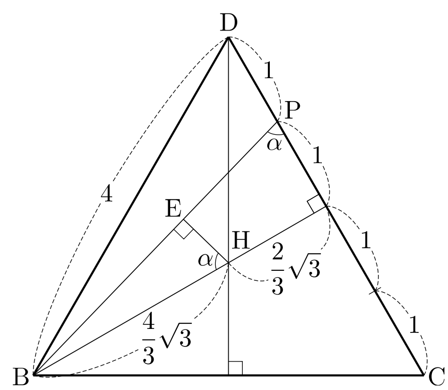
삼각형 BHE 에서 $\angle\mathrm{BHE} = \alpha$라 하면, $\angle\mathrm{BPC} = \alpha$가 되므로, $\tan\alpha = 2\sqrt{3}$ 임을 알 수 있고, $\overline{\mathrm{HE}} = \frac{4}{3}\sqrt{3} \times \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{39}}$가 됩니다.

따라서 $\tan\theta = \sqrt{26}$ 이 되므로 $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{9}$ 이 답이 됩니다.

답 : $\frac{\sqrt{3}}{9}$

[Type 2] $S' = S\cos\theta$ – **정사영 된 넓이를 이용해서 이면각을 구하는 방법**





[그림]

$\triangle$ABP 가 $\triangle$BCD 위로의 정사영 된 삼각형의 넓이는 $\triangle$BHP 의 넓이가 됩니다.

$\triangle$BHP 의 넓이는 $1 \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

왼쪽 그림에서 삼각형 ABP 의 넓이는 제2코사인법칙에 따라

삼각형 APD 에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2 = 4^2 + 1^2 - 2 \times 4 \times 1 \times \cos\frac{\pi}{3} = 13$ 이므로, $\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{13}$ 이고

같은 방법으로 삼각형 BPD에서 $\overline{BP} = \sqrt{13}$

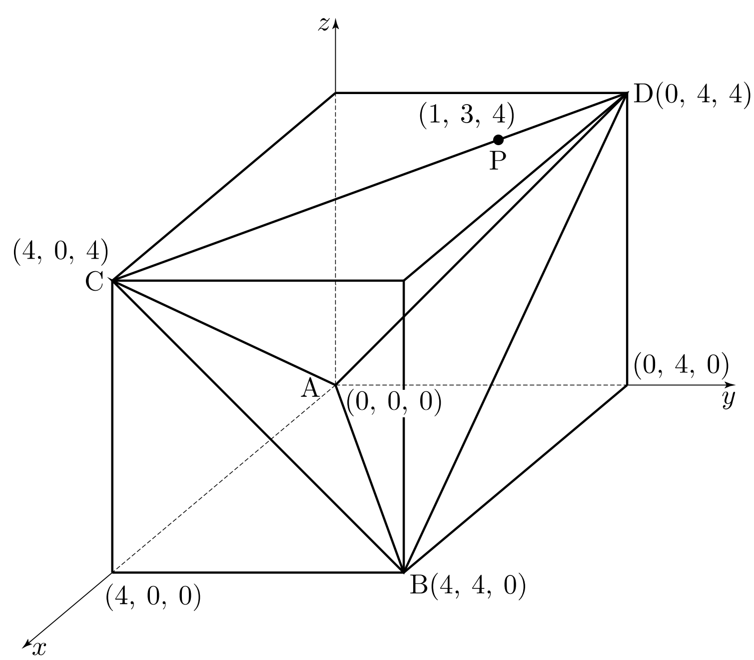
삼각형 ABP는 이등변삼각형이 되고 넓이는 6

결국, $\triangle ABP \times \cos\theta = \triangle HPB$이므로 , $\cos\theta = \dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$

답 : $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

[Type 4] 좌표 풀이 및 벡터 방정식을 도입하는 방법

정사면체이기 때문에 아래 [그림]과 같이 좌표공간에 표현할 수 있습니다.



[그림]

위 문항에서 삼각형 ABP와 삼각형 BCD를 포함하는 평면을 구해보면,

① 삼각형 BCD를 포함하는 평면의 방정식은 $x + y + z = 8$

② 삼각형 ABP를 포함하는 평면의 방정식은 $2x - 2y + z = 0$

따라서 $\cos\theta = \dfrac{2\times1+(-2)\times1+1\times1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$

결국, 좌표로 풀어도 답이 같습니다.

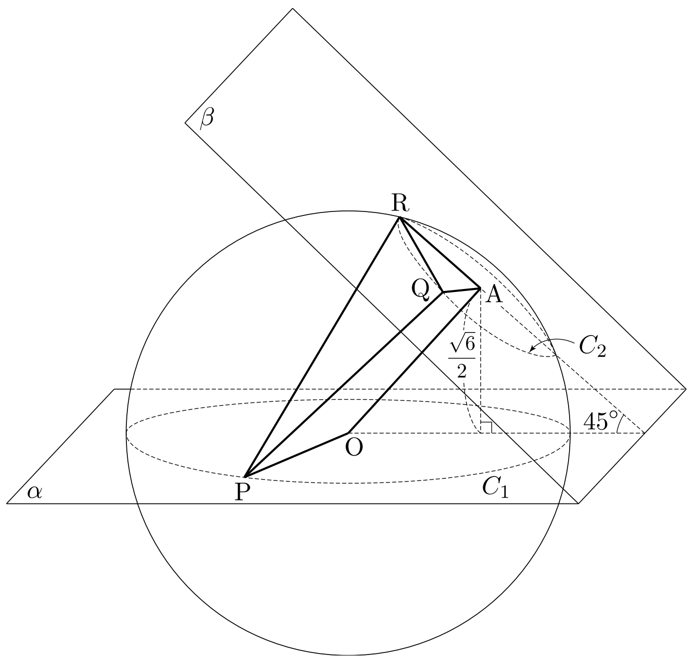
답 : $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

예제 13 2012년도 5월 예비평가 수학 가형 30번

반지름의 길이가 2인 구의 중심 O를 지나는 평면을 α라 하고, 평면 α와 이루는 각이 45° 인 평면을 β라 하자. 평면 α와 구가 만나서 생기는 원을 C_1, 평면 β와 구가 만나서 생기는 원을 C_2라 하자. 원 C_2의 중심 A와 평면 α 사이의 거리가 $\frac{\sqrt{6}}{2}$일 때, 그림과 같이 다음 조건을 만족하도록 원 C_1 위에 점 P, 원 C_2 위에 두 점 Q, R를 잡는다.

(가) $\angle QAR = 90^\circ$
(나) 직선 OP와 직선 AQ는 서로 평행하다.

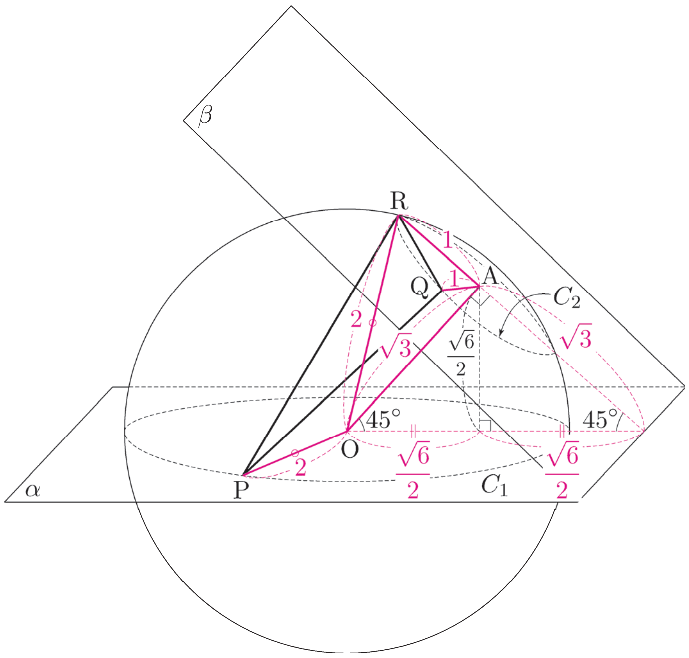
평면 PQR와 평면 AQPO가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값을 구하시오.



[Type 1] **삼수선의 정리를 이용한 이면각의 작도**

평면 PQR과 평면 AQPO가 이루는 이면각을 물어보고 있으므로, 가장 중요한 것은 교선이 보이는 지 입니다. 평면 PQR과 평면 AQPO의 교선은 $\overline{PQ}$ 임이 보이므로,
우리는 삼수선의 정리를 작도하여야 합니다.

삼수선의 정리를 작도하기 위해서 일단 문제에 주어져 있는 문제의 조건을 먼저 활용해보도록 합시다.



[그림]

① 반지름의 길이가 2인 구이므로, $\therefore \overline{OP} = \overline{OR} = 2$

② $\overline{OA}$는 구의 중심으로부터 평면과 만나서 생기는 원 C_2의 중심까지 이은 선분이므로,

$\overline{OA} \perp \beta$임을 알 수 있습니다. $\therefore \angle OAR = 90°$

③ 평면 α와 이루는 각이 45° 이라는 조건과 원 C_2의 중심 A와 평면 α 사이의 거리가 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$에

의하여, [그림 1]과 같이 작도할 수 있습니다. $\therefore \overline{OA} = \sqrt{3}$

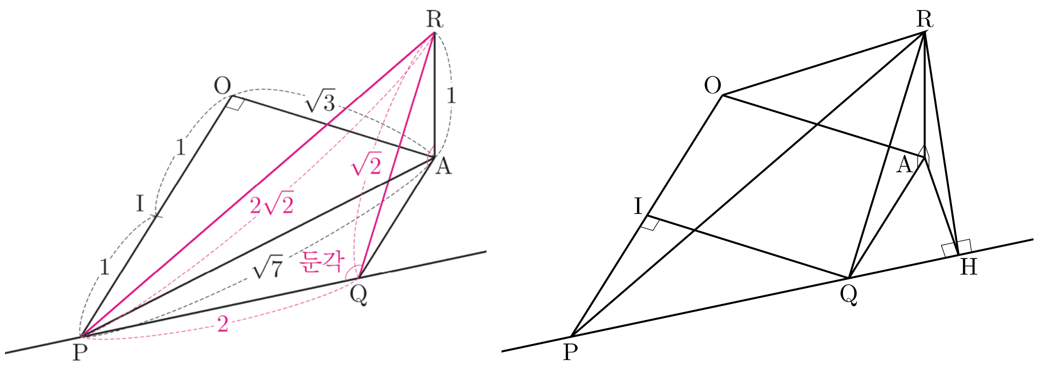
④ 삼각형 OAR에서 $\angle OAR = 90°$ 이므로,

$\therefore \overline{AR} = \sqrt{\overline{OR}^2 - \overline{OA}^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$

⑤ (가)의 조건에 따르면, $\angle QAR = 90°$ 이므로 $\overline{AR} = \overline{AQ} = 1$ ($\because$ 원 C_2의 반지름)이므로,

$\therefore \overline{QR} = \sqrt{\overline{AR}^2 + \overline{AQ}^2} = \sqrt{2}$

이를 바탕으로 삼수선의 정리를 작도하기 위해 평면 PQR와 평면 AQPO을 포함한
입체도형 부분을 떼어내서 그리면 다음 [그림 2]와 같습니다.



[그림 2]

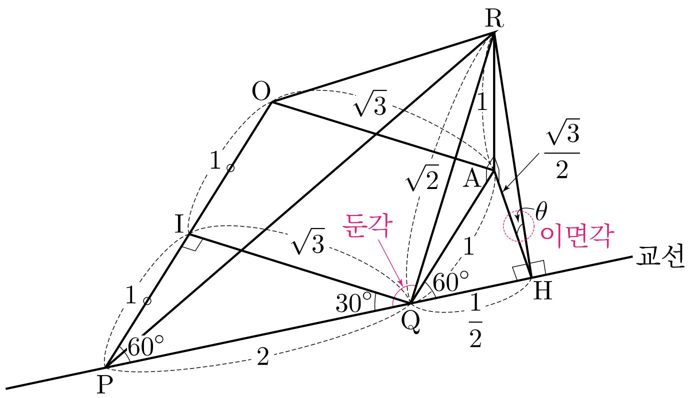
[그림 2]를 바탕으로 남은 조건을 이용하여 삼수선의 정리를 작도해보도록 합시다. 교선인 $\overline{\mathrm{PQ}}$에 양쪽 직각을 작도해야 합니다. 즉, 점 R에서 교선에 수선의 발을 내리고, 점 AQPO의 평면 위의 점에서 교선에 수선의 발을 내려야 합니다.

그런데, 삼수선의 정리를 작도할 때 평면 PQR이 예각을 포함했는지, 둔각을 포함했는지를 알아야 합니다.[29] 다음 [그림 2]와 같이 삼각형 PQR은 $\overline{\mathrm{PR}}^2 > \overline{\mathrm{PQ}}^2 + \overline{\mathrm{QR}}^2$ 이므로, 둔각 삼각형임을 알 수 있습니다. 평면 PQR은 둔각을 포함한 평면입니다.
(따라서 삼수선의 정리 작도를 할 때, 양쪽 직각이 교선의 연장선 밖에 떨어진다는 것을 유의해야 합니다.)

또한, (나)의 조건에 따르면, 직선 OP와 직선 AQ는 서로 평행하다고 했으므로, 점 Q에서 선분 $\overline{\mathrm{OP}}$에 내린 수선의 발을 I라 하면, $\therefore \overline{\mathrm{QI}} = \overline{\mathrm{AO}} = \sqrt{3}$, $\therefore \overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{OI}} = \overline{\mathrm{IP}} = 1$
따라서 삼각형 QPI는 직각 삼각형이고, $\angle \mathrm{QPI} = 60^\circ$, $\angle \mathrm{PQI} = 30^\circ$ 임을 알 수 있습니다.

29) 피타고라스 정리를 이용하여 빗변의 길이를 c, 남은 두 변의 길이를 a, b라고 하면, $c^2 > a^2 + b^2$이 성립하면 둔각삼각형이고, $c^2 = a^2 + b^2$이면 직각삼각형, $c^2 < a^2 + b^2$이면 예각삼각형임을 알 수 있습니다.

이를 바탕으로 점 R 에서 교선에 수선의 발을 떨어뜨릴 수 있고, 점 A 에서 교선에 수선의 발을 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 연장선에 내릴 수 있음을 알 수 있습니다. 그 점을 H 라고 합시다.
이를 작도한 모습은 아래의 [그림 3]과 같습니다.



[그림 3]

또한, 직선 OP와 직선 AQ는 서로 평행하다는 조건에 의하여, $\angle\mathrm{AQH}=60^{\circ}$ 임을 알 수 있습니다. $\overline{\mathrm{AQ}}=1$ 이므로, $\overline{\mathrm{QH}}=\dfrac{1}{2}$ 이고, $\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AQ}}^2-\overline{\mathrm{QH}}^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 입니다.

따라서, 이면각은 $\angle\mathrm{RHA}$ 이므로, $\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{RH}}}$ 의 값을 구하면 됩니다.

$\overline{\mathrm{RH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{AR}}^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ 이므로, $\cos\theta=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ 입니다. $\therefore\ \cos^2\theta=\dfrac{3}{7}$

답 : $\dfrac{3}{7}$